SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI
MEMORIE DELL'ACCADEMIA
DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

RENATO CACCIOPPOLI

TEORIA DELLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI COMPLESSE

$$\mathbb{P} \times \mathbb{P} \qquad \mathbb{P}^2$$

Appunti del corso di **teoria delle funzioni**
tenuto dal Prof. R. CACCIOPPOLI nell'anno
accademico 1947-48

a cura di
LUCIANO CARBONE, GIAMPIERO ESPOSITO,
LUCA DELL'AGLIO, GIUSEPPE TOMASSINI

IGNEUS EST OLLIS VIGOR

AD LUCEM

GIANNINI
EDITORE

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI
MEMORIE DELL'ACCADEMIA
DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE
10

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENATO CACCIOPPOLI

TEORIA DELLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI COMPLESSE

$$\mathbb{P} \times \mathbb{P} \qquad \mathbb{P}^2$$

Appunti del corso di **teoria delle funzioni**
tenuto dal Prof. R. CACCIOPPOLI nell'anno
accademico 1947-48

a cura di
LUCIANO CARBONE, GIAMPIERO ESPOSITO,
LUCA DELL'AGLIO, GIUSEPPE TOMASSINI

Collana Memorie dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche

Prima edizione italiana

Finito di stampare in Italia nel mese di novembre 2022
da Officine Grafiche Francesco Giannini & figli S.p.A. - Napoli

Giannini Editore
via Cisterna dell'olio, 6b - Napoli
ISBN 978-88-6906-250-6
DOI: 10.32092/1084

Il presente volume è stato pubblicato con il contributo di

Ministero per i Beni e le Attività Culturali

Regione Campania
(Progetto finanziato con la L.R. n. 7/2003,
contributo per la promozione culturale)

Università di Napoli "Federico II"

INDICE

Presentazione

Caccioppoli fu un genio matematico. Celebri e profonde le sue ricerche in vari campi. Dall'analisi funzionale alla teoria delle equazioni ellittiche, dalla teoria della misura a quella delle funzioni analitiche. Alcuni dei suoi risultati sono entrati nella storia della matematica. Molte delle sue idee hanno influenzato profondamente generazioni di ricercatori. L'importanza della sua attività scientifica può essere colta nelle parole di Carlo Miranda, altro grande matematico napoletano: "Se la matematica italiana riuscì a mantenere il passo ed a volte a precorrere la matematica europea, nonostante l'isolamento imposto dal fascismo, fu in gran parte per merito di Renato Caccioppoli".

L'attività scientifica di Caccioppoli è contenuta in un'ottantina di pubblicazioni che rivelano una originalità ed una creatività assolutamente eccezionali. Caccioppoli non amava il lavoro di lima, preferiva cambiare spesso argomento di ricerca e con l'intuito del genio era in grado di aprire nuove strade al progresso della matematica. Viene subito in mente la metafora di Grothendieck sulla possibilità che il pensiero ha di scegliere tra l'abitare in una casa già costruita dalle generazioni precedenti, magari riverniciando le pareti e facendo un po' di bricolage, o in un'area ancora vergine, dove lentamente costruire la propria dimora. Edoardo Vesentini scrisse:

Molti di quei lavori sono di lettura difficile, ed alcuni susciterebbero oggi le riserve di più di un referee. Ma, a chi voglia e sappia comprenderli, essi offrono spesso la sensazione inebriante di partecipare – a fianco di un ingegno raffinato – alla costruzione di un nuovo capitolo della scienza.

Caccioppoli fu anche un didatta affascinante: generazioni di matematici, fisici, ingegneri sono state segnate dalle sue lezioni indimenticabili, sempre tese a chiarire la portata di un'idea e poco inclini alla noia del tecnicismo. Ed anche i testi delle sue lezioni (ormai una rarità) sono così, raccontati (come si può raccontare la matematica). D'altro canto Caccioppoli aveva con la scienza, a tutti i livelli, questo rapporto: molta attenzione alla bellezza delle idee, meno al tecnicismo ed al noioso lavoro di rifinitura.

Risulta pertanto pregevole l'iniziativa di "restaurare" il Corso di Teoria delle funzioni di più variabili complesse da lui tenuto nell'anno accademico 1947/48 e il cui testo dattiloscritto è stato fortunosamente di recente ritrovato. Ciò sia per il valore di testimonianza storica a 75 anni da quando fu tenuto sia per fornire un esempio della sua originalità nel trattare un argomento ostico e di assoluto rilievo.

Carlo Sbordone   Guido Trombetti

INTRODUZIONE

LUCIANO CARBONE, GIAMPIERO ESPOSITO, LUCA DELL'AGLIO

1- I CORSI SUPERIORI DI RENATO CACCIOPPOLI

È difficile sottovalutare l'importanza del ruolo svolto nella matematica italiana da Renato Caccioppoli, sia come ricercatore sia come guida di un gruppo numeroso di allievi destinati a brillanti carriere. Si è anche detto più volte che solo grazie alla sua opera la matematica italiana è rimasta agganciata a quella mondiale negli anni che vanno dalla metà degli anni Trenta alla metà degli anni Cinquanta (cfr., e.g., Toma 1992, Gatto e Toti Rigatelli 2009, Foschini 2022). Insieme a Carlo Miranda costituì e capeggiò una scuola di analisi matematica a Napoli che primeggiò in Italia dalla seconda metà degli anni Trenta alla prima metà degli anni Cinquanta del secolo passato.

La sua influenza si manifestò nelle classiche forme di lavori personali, ricerche suggerite ad allievi, conferenze e corsi.

Tracce abbondanti della sua attività personale rimangono nella raccolta delle opere (Caccioppoli 1963) ed è facile individuare stimoli forniti alle ricerche dei suoi allievi sfogliando i loro lavori. Si hanno anche esempi di qualche sua conferenza (cfr., e.g., Caccioppoli 1963; Carbone et al. 1997).

Dei corsi superiori invece poco si è salvato. Un'eco lo si può ritrovare in una monografia di Cafiero del 1953 (Cafiero 1953) e in quella, sempre sua, ben più ampia, profonda e dettagliata del 1959 (Cafiero 1959, cfr., e. g., pp. 222, 283). In entrambe si rinvia in più punti alle Lezioni di Analisi superiore tenute presso l'università di Napoli nell'anno accademico 1950-1951, lezioni dedicate alla teoria della misura.

I corsi comunque erano naturalmente i luoghi nei quali poteva esporre in maniera approfondita le sue idee. Essi erano tenuti nell'ambito degli insegnamenti, svolti per lo più per incarico, di Teoria delle funzioni e, parzialmente, di Analisi superiore. Erano nominalmente destinati a studenti del corso di laurea in matematica dell'università napoletana. In realtà finivano con l'essere frequentati, soprattutto il primo, da giovani ricercatori e si affiancavano a quelli tenuti da Carlo Miranda, l'altro maestro in quegli anni attivo nella matematica non solo napoletana, spesso in sinergia con Renato. Talora venivano dati anche presso altre strutture universitarie come la Scuola Normale Superiore di Pisa. A Pisa fu pubblicato ad esempio un volume di Carlo Miranda basato su un corso tenuto prima a Napoli e poi proprio alla Scuola (Miranda 1949).

Di questi corsi rimane un vivido ricordo di uno dei frequentatori, Renato Fiorenza.

In una stanza dell'Istituto di Analisi Superiore in via Mezzocannone c'era al centro un tavolo rettangolare che, al posto del panno verde dei tavoli da gioco, aveva una lastra di ardesia, una vera e propria lavagna. Eravamo tutti seduti attorno a tre lati del tavolo/ lavagna, mentre al quarto lato sedeva Caccioppoli, munito di gesso e cassino.

La lezione era trisettimanale, il corso annuale: credo fosse svolta come "incarico d'insegnamento" e perciò rispettava gli orari istituzionali. Si effettuava, diceva lui, "alla via delle quattro" del pomeriggio, ma in realtà passeggiavamo sul corridoio ad aspettarlo fin quasi alle cinque. Non era una lezione cattedratica, perché era svolta come una chiacchierata da salotto, ma molto raramente c'erano interventi. Chiaramente non era una lezione preparata: rifletteva ad ogni passaggio, e questo consentiva anche a noi di riflettere; il discorso era strettamente rivolto all'argomento della lezione, e non c'erano divagazioni di alcun tipo: era davvero un piacere ascoltarle. Le battute erano una caratteristica del personaggio, ma non avvenivano durante la lezione: come se avesse detto: ora parliamo seriamente.

Raramente gli ascoltatori, osserva Fiorenza, ponevano domande o facevano osservazioni e queste rare interruzioni non sembravano gradite quasi fossero interruzioni nel flusso dei pensieri del maestro.

Ma il corso non si esauriva in aula e veniva il momento delle discussioni. Ancora Fiorenza narra quanto spesso accadeva dopo le lezioni.

Ricordo le lunghe passeggiate anche a tarda sera, una pizza in una traversa di piazza dei Martiri, dove presi una multa per sosta vietata che volle pagare lui (definì un "pesce immane" quello che ci mostrò il cameriere), una passeggiata in via Diaz in cui lui camminava avanti con Gagliardo e noi tutti dietro (il giorno dopo Gagliardo mi confidò che nella notte aveva scritto un teorema, suggerito dai discorsi con Caccioppoli).

Silvano Matarasso, da giovane studente, frequentò proprio nell'anno del suicidio di Renato quell'insegnamento di Analisi superiore che rimase interrotto. Aveva anche intenzione di seguire un suo corso monografico e fu presente ad alcune lezioni. Ne conferma il carattere quasi iniziatico, nel senso che era pensato essenzialmente per ricercatori. Ricorda poi come Caccioppoli tendesse a scrivere molto poco e a mettere soprattutto in luce legami spesso molto riposti tra argomenti diversi.

Di un corso in particolare si parlò molto quando venne dato e se ne auspicava la pubblicazione.

Francesco Severi, matematico di alto valore e fondatore dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica, che nel corso degli anni Trenta aveva ottenuto profondi risultati sulla variabile complessa (cfr., eg., Fichera 1999, Tomassini 2011), in occasione di un convegno svoltosi a Parma il 4 giugno 1949, commentando una conferenza tenuta da Caccioppoli, osservava:

Ora io so che il prof. Caccioppoli ha fatto un magnifico corso sulle funzioni analitiche a Pisa, ma egli sollecitato a pubblicare se ne è schermito. Io rinnovo a lui la preghiera di voler pubblicare questo corso che ci sarà senz'altro utile.

D'altro canto i risultati ottenuti da Caccioppoli negli anni Trenta erano talmente rilevanti da indurre Paul Montel, uno dei massimi esperti in questo settore di ricerca, a scrivere nella Encyclopédie Française:

> *La théorie des familles normales de fonctions de plusieurs variables complexes est dominée par le théorème de Caccioppoli: une famille normale par rapport à chaque variable est normale par rapport à l'ensemble de ces variables.*

In effetti questo risultato coniuga profondità, semplicità, eleganza e riproduce un fenomeno già messo in evidenza dal teorema di Hartogs sull'olomorfia delle funzioni separatamente olomorfe (cfr., *e.g.,*Tomassini 2011 p. 14).

Riemerge ora, in maniera fortunosa, proprio un dattiloscritto concernente questo corso o meglio la sua versione data all'Università di Napoli nell'anno accademico 1947-1948 e che qui presentiamo.

2 - IL RITROVAMENTO E IPOTESI SUI POSSIBILI AUTORI DEL DATTILOSCRITTO

2.1 - Il primo affioramento

Ecco di seguito come è stato ritrovato questo dattiloscritto contenente più precisamente il testo di un corso di più variabili complesse svolto da Renato Caccioppoli durante l'anno accademico 1947-1948 nell'ambito del corso di Teoria delle Funzioni, da lui tenuto per incarico, nel racconto di chi tra i curatori lo ha ritrovato (Giampiero Esposito):

> *Nel gennaio 2020 avevo bisogno di un libro di analisi complessa in più dimensioni per le mie ricerche sulla diffusione da potenziale. Il libro era disponibile presso la biblioteca Miranda del dipartimento di matematica della mia stessa università, la Federico II di Napoli. Una bibliotecaria gentilmente fotocopiò le pagine che erano di mio interesse. Tuttavia, ad un esame attento, nelle fotocopie non era visibile l'ultimo rigo di ogni pagina.*
>
> *Per evitare di mortificare la bibliotecaria che era stata comunque molto gentile, in data 24 gennaio 2020 mi recai personalmente presso la biblioteca, per completare a mano, sulle fotocopie, le righe mancanti.*
>
> *Tuttavia, il libro non era più nella posizione indicata nel cartellino del vecchio schema di classificazione, e dovetti dunque attendere che la bibliotecaria lo trovasse per altra via. Ebbi dunque il tempo di guardarmi attorno. C'era l'armadio dove si poggiano i numeri doppi di alcune riviste. Accanto a questo, un secondo armadio, ove erano disponibili alcuni libri (forse copie doppie). Mi sembrava di averli tutti, ma all'estrema sinistra dello scaffale si stagliava la copertina di un libro antico, con copertina rigida elegante, color verde sul davanti e color avorio sul dorso, che resta ben aperto se solo lo si apre, una virtù che molti libri moderni non conoscono. Per giunta, il dorso recava scritto: CACCIOPPOLI.*

Apertolo, lessi che si trattava degli appunti delle lezioni tenute dal Professor R. Caccioppoli nell'anno accademico 1947-48, sul tema "TEORIA DELLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI COMPLESSE" per il corso di Teoria delle Funzioni. Lo sfogliai, il testo mi appariva chiaro e molto interessante, il continuo confronto tra il punto di vista dell'analisi e quello della geometria mi pareva illuminante. Dunque lo presi in prestito. Con l'idea di riproporlo per il suo interesse storico e pedagogico all'attenzione degli studiosi iniziai a trascriverlo in Plain Tex.

Sul perché quel testo dattiloscritto fosse lì è possibile solo, al momento, fare qualche congettura.

Va osservato che recentemente Elena Miranda, figlia di Carlo Miranda, ha voluto donare al dipartimento di matematica filiazione di quell'istituto policattedra del quale suo padre è stato, si può senz'altro affermare, il creatore, buona parte dei libri e l'intera collezione di estratti paterni.

E' molto probabile allora che il dattiloscritto fosse inserito tra i libri, ma che mancando una qualsivoglia indicazione editoriale non sia stato catalogato e, un po' disattentamente, inserito, come solitamente accade per gli estratti e per le pubblicazioni preventive in esubero, tra i materiali a disposizione libera.

Il dattiloscritto consiste di cinque capitoli detti "parti", per complessive 181 pagine, più una di frontespizio. Le equazioni sono quasi tutte scritte a mano. La calligrafia delle equazioni sembra restare la stessa lungo i cinque capitoli. In particolare, la lettera "d" usata per la misura di integrazione è scritta con un lieve vezzo, ovvero tra il cerchietto in basso e il segmento verticale si nota un tratto di curva, tangente al cerchietto, che ritaglia una minuscola area. Ci sono anche sei figure ed una tabella. Il dattilografo (o dattilografa) non sembra essere stato un matematico, perché scrisse in modo errato i nomi di matematici famosi come Cauchy e Liouville, e scrisse male alcune parole, il che indica la mancata comprensione del significato di una affermazione matematica. Ad esempio, all'inizio del quarto periodo del Capitolo 2, nel dattiloscritto compare la frase: "Vogliamo dal significato al singolo", laddove era da intendersi: "Vogliamo dare significato al simbolo", e infatti subito dopo si scrive il simbolo matematico dell'integrale di superficie di una funzione di tre variabili, e si definisce con cura tale concetto. Ci sono inoltre molti refusi, ad esempio: inversione dell'ordine relativo delle lettere in una parola, spazi vuoti all'interno di una parola o parole adiacenti scritte senza spaziatura, lettere cancellate.

Per quanto concerne l'effettiva attribuzione a Caccioppoli del testo vanno segnalati vari indizi.

Talvolta si fa un uso estroso di alcune parole, ad esempio, nel capitolo quinto viene utilizzato il termine "inferiori" a significare "ulteriori" , con evidente allusione al classico "vedi *infra*". Questo fenomeno sembra essere coerente con una certa predilezione di Caccioppoli per quelle invenzioni linguistiche delle quali sono piene le sue lettera a Maria Del Re (Carbone et al. 2010), spesso fondate proprio sull'utilizzo del latino.

Ricorrono, pur se in pochi casi, periodi eccezionalmente lunghi, ai quali Caccioppoli era incline nei suoi scritti.

Appaiono anche alcune caratteristiche costanti del suo modo di scrivere matematica: dare gli enunciati dei teoremi, quasi mai presentati esplicitamente come tali, alla fine delle considerazioni che portano alla loro dimostrazione; fare un uso molto ridotto delle formule; cercare di mettere in evidenza legami tra teorie in apparenza lontane.

In un caso appare una sobria citazione di un suo importante risultato sulla distribuzione delle singolarità delle funzioni di due variabili complesse.

Va precisato peraltro che la grafia che compare, sempre uguale, nel completamento delle formule è sembrata subito non corrispondere a quella di Caccioppoli stesso, ben nota ad esempio dalle lettere prima menzionate. Dunque va immaginato che qualcuno che ha partecipato al corso abbia redatto le note poi consegnate al (o alla dattilografa) per una versione dattiloscritta.

Un'analisi filologica è stata allora eseguita da Edoardo Esposito, professore associato di filologia presso l'università di Avignone ora in pensione, confrontando il testo del dattiloscritto e varie pagine delle Lezioni di Analisi matematica Parte prima di Caccioppoli. L'analisi ha stabilito una compatibilità della tesi della identità degli autori dei due testi. Naturalmente la forte stilizzazione del linguaggio matematico non ha potuto consentire di pervenire ad un risultato più preciso.

2.2 - Il secondo affioramento

Ritrovato questo testo e richiamata l'attenzione su di esso, si è cercato di trovare traccia di altre eventuali copie. Si è scoperto così che Pasquale Zecca, un'analista appassionato di variabile complessa, possedeva un dattiloscritto dallo stesso titolo.

È stato effettuato allora un confronto in dettaglio tra i due dattiloscritti.

Questo secondo dattiloscritto ha una copertina più sottile, non dura, ma i testi sono risultati identici, come identici sono risultati gli interventi e gli errori del dattilografo e il completamento a mano delle formule. Tali verifiche sono state svolte alle pagine 1, 2, 4, 6, 8, 16, 18, 22, 23, 26, 27, 28, 80, 90, 100, 106, 128, 144, 145, 147, 149.

Anche in questo caso si pone il problema dell'origine di questo secondo dattiloscritto.

Lo Zecca ricordava trattarsi di un dono verso la metà degli anni Sessanta da parte di Silvano Matarasso, che conosceva bene il suo amore per la teoria delle funzioni di variabile complessa, ma quest'ultimo non ha potuto confermare la circostanza.

Un'ipotesi simile a quella formulata per l'apparizione del primo dattiloscritto si può comunque formulare anche per questo secondo.

In effetti poco dopo la scomparsa di Renato Caccioppoli il fratello Ugo donò all'allora istituto di matematica la quasi totalità dei suoi libri ed estratti. Solo i primi furono catalogati, mentre i secondi, come accade di solito, furono lasciati a disposizione. Il dattiloscritto, privo di indicazioni editoriali, deve essere stato inserito tra questi ultimi.

2.3 - Il terzo affioramento

Confermata la convinzione che si era di fronte ad un corso tenuto da Caccioppoli e rielaborato da un allievo, l'attenzione si è concentrata sull'identificazione dell'allievo, che andava prioritariamente cercato all'interno del gruppo di giovani ricercatori che contornava il maestro in quegli anni: Federico Cafiero, Carlo Ciliberto, Donato Greco, Guido Stampacchia.

Renato Fiorenza, sentito sulla questione, ha ricordato che Greco talora gli aveva accennato di come Caccioppoli lo avesse stimolato a pubblicare una monografia dedicata alle funzioni di più variabili complesse. Qualche altro indizio spingeva a considerare Greco come estensore del dattiloscritto: il suo interesse, ben noto, per la variabile complessa; la particolare attenzione data nel suo testo per il corso di Istituzioni di analisi superiore alle funzioni di più variabili complesse, argomento generalmente appena accennato (Greco 1965) . Così le prime ricerche si sono concentrate su di lui. Tuttavia il figlio Luigi ha ritenuto di poter escludere che la grafia dei completamenti delle formule fosse di suo padre.

Analogamente l'analisi di campioni di grafie di Cafiero, forniti da Carlo Sbordone, e di Ciliberto, in possesso di uno dei curatori (Luciano Carbone), ha portato ad escludere una attribuzione a loro. Rimaneva dunque Stampacchia, la cui grafia effettivamente sembrava compatibile.

Recentemente i figli di Stampacchia hanno donato al dipartimento matematico napoletano quanto era in loro possesso delle carte matematiche paterne, rispettando un suo desiderio.

La ricerca si è spostata dunque su questo fondo, appena riordinato e descritto (Carbone et al. 2019).

Dopo un'accurata revisione si sono ritrovati due quaderni manoscritti che si riferiscono proprio al corso tenuto da Caccioppoli. In un primo momento, nel riordino del fondo, questi due quaderni erano stati erroneamente catalogati come parti di un corso tenuto dallo stesso Stampacchia.

Si tratta di due quaderni dalla copertina nera lievemente rugosa e di circa una quarantina di facciate ciascuno. Sono scritti con grafia molto chiara e sono sostanzialmente privi di correzioni, segno quest'ultimo di una attenta rielaborazione.

I quaderni coprono solo il materiale nei capitoli primo e terzo del dattiloscritto. Il confronto tra le due versioni del capitolo primo è sufficientemente indicativo: le equazioni sono identiche in numero e contenuto, e scritte con la stessa calligrafia. Ma il quaderno numera tre equazioni in più rispetto al dattiloscritto (in totale, 28 anziché 25). Nel testo, lievi variazioni di parole sono state effettuate. Ad esempio, all'inizio del capitolo 1 il quaderno scrive: "Iniziamo con l'introdurre qualche simbolo e col dare alcune definizioni preliminari." Mentre il dattiloscritto scrive: "Iniziamo col dare qualche simbolo e alcune definizioni preliminari." Appena più avanti, il quaderno scrive: "Volendo far uso di un linguaggio geometrico non potremo più naturalmente riferirci ad un piano complesso. Ci riferiremo bensì ad uno spazio complesso a 2n dimensioni reali, …" mentre il dattiloscritto si esprime come segue: "Volendo far uso di un linguaggio geometrico non potremo riferirci ad un piano complesso bensì ad uno spazio complesso a 2n dimensioni reali". Inoltre, nel quaderno viene inserita una nota a pié pagina per definire gli insiemi perfetti, che invece nel dattiloscritto sono definiti nel corpo del testo principale. Nel quaderno si inserisce anche un sottoparagrafo sulle funzioni biarmoniche, che invece nel dattiloscritto sono definite senza sottoparagrafo. Dunque si nota un certo sforzo di ulteriore rifinitura, nel passaggio dal quaderno al dattiloscritto.

Si è avuta così la definitiva conferma che a rielaborare con molta cura il corso di Caccioppoli fosse stato proprio Stampacchia. Molto probabilmente aveva dato a Caccioppoli e Miranda due copie del dattiloscritto, ma di una terza copia, che avrebbe presumibilmente conservato, nel fondo non vi è traccia. Bisogna peraltro ricordare che parte delle sue carte matematiche sono conservate presso una biblioteca universitaria pisana ed anche in questa parte non vi è traccia del dattiloscritto. Infine una terza quota delle sue carte fu donata immediatamente dopo la sua scomparsa alla biblioteca della Scuola Normale Superiore di Pisa, ultima sua sede di insegnamento e di ricerca, ma questa parte al momento non sembra reperibile.

Sembra anche evidente che vi fosse l'intenzione di arrivare a qualche monografia a stampa, intenzione caduta per motivi forse legati all'impetuoso sviluppo che la disciplina ebbe in quegli anni.

2.4 - Un quarto affioramento?

Si è dunque individuato in Stampacchia colui che aveva rielaborato le lezioni di Renato, ma è stato un lavoro solitario?

Le note tratte dai corsi hanno diverse formazioni: registrazioni (o, un tempo almeno, versioni stenografate), rielaborazioni di appunti rivisti o meno da chi aveva tenuto il corso, rielaborazioni di più versioni di appunti…

Potrebbero le note di questo corso ricadere, ad esempio, in quest'ultimo caso?

In effetti nel fondo Stampacchia non sono stati ritrovati i quaderni relativi agli altri capitoli.

Argomento questo senz'altro debole per congetturare la presenza di un altro rielaboratore; *e silentio rerum* dunque, schiacciato ad esempio dall'osservazione della continuità e stabilità della grafia nel completamento delle formule.

Tuttavia il fondo Stampacchia stesso e i pochissimi documenti del fondo Caccioppoli presenti nel dipartimento di matematica napoletano riservano una sorpresa che induce a riflettere.

Il fondo Stampacchia contiene anche alcuni quaderni manoscritti riferibili al celebre corso di Analisi superiore tenuto da Renato nell'anno accademico 1950-1951 del quale abbiamo fatto cenno mentre nel fondo Caccioppoli è presente un dattiloscritto riferentesi ad un capitolo dello stesso corso. Sul foglio che racchiude il dattiloscritto è annotato che la stesura del capitolo è a cura di Guido Stampacchia e…Federico Cafiero. La nota è scritta con la grafia quasi inconfondibile proprio di Cafiero.

Nella rielaborazione dunque delle note potrebbe essere intervenuto effettivamente qualche altro frequentatore del corso stesso e l'ipotesi Donato Greco, uscita dalla porta potrebbe come si usa dire rientrare dalla finestra.

3 – QUALCHE CONSIDERAZIONE SULL'ELABORAZIONE DEL DATTILOSCRITTO

Comunque stia la questione riguardante gli autori del dattiloscritto, certamente vi è stato, come si evince ad esempio dal confronto del dattiloscritto con i quaderni di Stampacchia e dallo stesso livello di precisione di questi quaderni, del quale si è già fatto cenno, un intenso lavoro di rielaborazione. E' quanto accade di frequente in queste situazioni. Le modalità stesse nelle quali veniva svolto il corso impedivano, come osserva ancora Fiorenza, che fossero presi appunti scritti molto dettagliati. Di questi eventuali appunti al momento non è stata rinvenuta traccia e ignoriamo se la stesura presente dei quaderni di Stampacchia sia stata frutto anche di ulteriori colloqui con Caccioppoli.

È possibile formulare qualche ipotesi attendibile almeno sulla tipologia dell'elaborazione? Ragionamenti analogici inducono a formulare una risposta.

Le intuizioni matematiche di Renato spesso rimanevano al livello di baluginii con ipotesi di validità non ben chiarite e mere indicazioni di massima sui metodi dimostrativi. La cura dei dettagli era assai modesta e spesso sacrificata alla brillantezza dell'esposizione. Questo modo di far matematica aveva determinato vari scontri con recensori che talora avevano dovuto ammettere in un secondo momento di non aver afferrato le implicazioni delle idee esposte.

È noto che lavori di Stampacchia, di Cafiero, di Ciliberto sono certamente fondati su intuizioni di Renato, ma, attraverso un lavorio intenso, la formulazione dei risultati risulta precisa e le dimostrazioni sono logicamente consistenti. Lo stesso lavorio può essere stato messo in atto per questo corso.

4 – GUIDO STAMPACCHIA, RENATO CACCIOPPOLI E CARLO MIRANDA

E' opportuno ora lumeggiare i rapporti tra Guido Stampacchia, Renato Caccioppoli e Carlo Miranda, i due affiatati capiscuola napoletani.

Tali rapporti furono intensi e ricchissimi, coinvolgenti sia sul piano umano che su quello scientifico. Diamo qui solo qualche testimonianza della stima che circondava Guido all'interno della scuola napoletana e dei rapporti umani che intercorrevano. Un cenno ai legami scientifici sarà dato nel seguito in un contesto preciso.

Stampacchia, napoletano di nascita, era uno studente della Scuola Normale di Pisa agli inizi degli anni Quaranta del Novecento. I casi della guerra lo riportarono a Napoli dopo l'armistizio e entrò in contatto con Caccioppoli e Miranda. Qui si svolse la sua carriera e diede vita ad una ventina di lavori fino al 1952, anno nel quale vinse un concorso di professore ordinario.

Probabilmente è da considerarsi uno dei frutti più maturi di quella scuola.

Ad esempio Ennio De Giorgi (1978) nella sua commemorazione all'Accademia dei Lincei di Stampacchia ricorda una sua permanenza a Napoli, ove si era recato su suggerimento di Mauro Picone, suo maestro, come a suo tempo lo era stato di Caccioppoli e Miranda, e scrive:

> *Perciò mi inviò* [*sc.* Picone *n.d.c.*] *per alcuni giorni a Napoli, ove parlando con Caccioppoli, Stampacchia e Carlo Miranda, potei sperimentare tutta la ricchezza di idee espressa dalla loro vivida voce, maggiore ancora di quella espressa dai loro scritti più geniali.*

Livio Clemente Piccinini (2016), quando Caccioppoli era ormai scomparso da una decina di anni, ebbe Carlo Miranda come presidente della commissione giudicatrice per conferirgli il perfezionamento in scienze matematiche presso la Scuola Normale Superiore. A conclusione dei lavori invitò a cena, come si usava, Miranda e gli altri componenti la commissione, De Giorgi e Stampacchia. In quell'occasione Miranda gli disse indicando proprio De Giorgi e Stampacchia:

> *Vedi, io l'ho sempre detto che questi due ragazzi avrebbero fatto molta strada.*

Naturalmente i ragazzi avevano rispettivamente solo 10 e 16 anni in meno del "vecchio" maestro.

Il figlio di Guido, Mauro racconta come nello studio di suo padre fosse sempre presente un ritratto di Caccioppoli.

Uno degli estensori di questa introduzione (Luciano Carbone) nel 1978, allora giovane ricercatore presso la Scuola Normale pisana e di provenienza napoletana come Stampacchia, ebbe il compito di comunicare a Carlo Miranda la notizia della repentina scomparsa di Guido. Ricorda ancora vividamente l' incredulità, lo sbigottimento e la commozione che provò il vecchio maestro.

Nel fondo Stampacchia, infine è stato ritrovato un appunto nel quale, forse in occasione di qualche discorso che Guido stava preparando in ricordo di Renato, si legge:

> *La Sua figura, il Suo insegnamento, trascendendo gli ideali scientifici, rimangono in me e negli altri Suoi allievi come modello e norma di vita.*

Una fine prematura accomunerà allievo e maestro, l'uno scomparso a 56 anni, l'altro a 55.

5 - IL CONTENUTO DEL DATTILOSCRITTO E LA SUA COLLOCAZIONE NELLO STUDIO DELLE FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA

5.1 - I prerequisiti al corso

È possibile ricostruire con una certa precisione i prerequisiti che chi seguiva il corso sulle funzioni di più variabili complesse doveva possedere.

In una prima edizione del testo Lezioni di analisi matematica Parte prima Caccioppoli (Caccioppoli s.d.) dedicava uno spazio notevole in confronto a testi analoghi ad argomenti di variabile complessa.

Il materiale contenuto nel capitolo terzo dal titolo Numeri complessi era piuttosto consueto: venivano introdotti i numeri complessi in forma algebrica e trigonometrica, veniva studiata l'operazione di estrazione di radice e venivano definite le radici primitive dell'unità; unica piccola variazione era costituita dalla introduzione delle potenze ad esponente razionale.

Nel capitolo settimo dal titolo Serie venivano già introdotte le serie multiple (paragrafo undicesimo).

Nei paragrafi undicesimo e dodicesimo del capitolo undicesimo rispettivamente dai titoli Funzioni complesse e Funzioni di più variabili venivano discussi i concetti di limite e di continuità delle funzioni di variabile complessa e introdotta la nozione di derivabilità.

La vera novità era contenuta in alcuni paragrafi del capitolo dodicesimo dal titolo Serie di funzioni. Nel paragrafo undicesimo utilizzando le serie di potenze nel campo complesso veniva introdotta la funzione esponenziale di base e ad esponente complesso, nel paragrafo dodicesimo le funzioni trigonometriche e iperboliche ad argomento complesso, nel paragrafo tredicesimo potenze e logaritmi, nel paragrafo quattordicesimo le inverse delle funzioni trigonometriche con cenni agli sviluppi in serie di log (1+z), arctg z, $(1+z)^p$ con p complesso. Lo studente veniva così addestrato molto presto all'uso di funzioni a più valori.

In una edizione successiva questo capitolo veniva omesso (Caccioppoli 1950) e nella sua interezza veniva riproposto come capitolo primo nel testo Lezioni di analisi matematica Parte seconda (Caccioppoli 1951).

Veniva ampliata invece la discussione dei limiti e della continuità delle funzioni di variabile complessa presentata, come accennato, nel paragrafo undicesimo del capitolo undicesimo: si esaminavano infatti il comportamento del modulo e dell'anomalia, curiosamente appaiono però in questa ulteriore trattazione delle imprecisioni.

È possibile anche ricostruire quanto Caccioppoli ritenesse essenziale conoscere della teoria delle funzioni di una variabile complessa, argomento generalmente affrontato nel corso di Analisi Superiore. In effetti Caccioppoli aveva dato queste indicazioni ad un suo studente reduce di guerra, Vito Aiello, attraverso delle annotazioni sull'indice di un classico testo di variabile complessa, il Sansone (Sansone 1947), da lui consigliato. Questo indice è stato messo a disposizione da Fausto Acanfora, analista napoletano nipote acquisito ed erede delle carte matematiche dell'Aiello.

Gli argomenti individuati erano i seguenti.

(I) Piano complesso e sfera complessa; funzioni continue; derivata e condizioni di monogeneità; funzioni olomorfe; raggio e cerchio di convergenza delle serie di potenze; teorema di Cauchy-Hadamard per la determinazione del raggio di convergenza di una serie di potenze; derivabilità termine a termine delle serie di potenze; le serie di potenze come funzioni olomorfe nel cerchio di convergenza; le funzioni elementari: esponenziale, seno, coseno, logaritmo, elevamento a potenza, arcoseno, arcocoseno, arcotangente.

(II) Integrale curvilineo di una funzione complessa; proprietà degli integrali curvilinei di funzioni complesse; integrali di funzioni complesse dipendenti da parametri, continuità e derivabilità rispetto ai parametri; teorema integrale di Cauchy, e sua estensione alle aree più volte connesse; la formula integrale di Cauchy; formule dell'incremento definito e della derivata, derivazione sotto il segno di integrale, formula generale delle derivate; teorema di Morera; la serie di Cauchy-Taylor; zeri di una funzione olomorfa e principio di identità; teorema di Cauchy-Liouville; funzioni armoniche in due variabili e problema di Dirichlet; serie di Laurent; elementi analitici e funzioni analitiche secondo Weierstrass; serie di funzioni analitiche e teorema di Weierstrass.

(III) Punti regolari e ordine degli infinitesimi; singolarità isolate; poli e singolarità essenziali isolate; comportamento di una funzione nell'intorno di un punto singolare isolato; punti singolari non isolati e punti di addensamento; residui integrali; il teorema integrale di Cauchy per una regione con un numero finito di punti singolari; derivata logaritmica e formula dell'indicatore logaritmico; il teorema fondamentale dell'algebra.

(IV) Il teorema di Mittag-Leffler per la determinazione delle funzioni uniformi con prescritte singolarità in un insieme di punti avente un unico punto di accumulazione. La fattorizzazione di Weierstrass delle trascendenti intere dedotta dal teorema di Mittag-Leffler.

Le notizie fornite da questo indice sono confermate dal recente ritrovamento di un dattiloscritto (Caccioppoli 1949), nel quale sono riportati appunti dalle lezioni di un corso di Analisi superiore tenuto da Caccioppoli proprio in quegli anni, appunti peraltro dei quali non si può affermare che siano stati da lui revisionati.

Questi dunque erano i prerequisiti che l'ascoltatore doveva possedere necessariamente.

D'altro canto i frequentatori del corso erano ricercatori e dunque Renato poteva immaginare che avessero anche una qualche conoscenza, almeno di massima, dei risultati da lui già ottenuti nel settore.

5.2 - Un breve sommario

È possibile ora dare un breve sommario del materiale contenuto nel dattiloscritto.

Il primo capitolo tratta argomenti che fanno da raccordo col materiale di un primo corso di analisi complessa: il concetto di funzione analitica di due variabili complesse, la formula integrale di Cauchy, il teorema di Goursat, le serie di Taylor e di Laurent, il teorema di Liouville, le funzioni biarmoniche, il teorema di Weierstrass sulle successioni di funzioni analitiche, la forma di Poincaré delle condizioni di analiticità, campo ristretto e campo totale di convergenza di una serie di potenze, prolungamento analitico, le serie doppie e il loro campo di convergenza. Nel secondo capitolo viene definita l’operazione di integrazione per le funzioni di due variabili complesse e si fa uso con taglio pedagogico di concetti topologici. Nel terzo capitolo vengono esposti metodi escogitati per introdurre nello spazio delle n variabili complesse i punti all’infinito e per definire una funzione analitica in tali punti. Appare molto chiaro e formativo il confronto tra il punto di vista dell’analisi e quello della geometria per realizzare tale programma. Nel quarto capitolo vengono studiate le funzioni implicite, mentre il quinto è dedicato alle singolarità. Vengono dunque studiate, tra l’altro, le singolarità delle funzioni meromorfe di due variabili, i problemi di riassorbimento delle singolarità da parte del campo di olomorfia, e la caratterizzazione analitica della pseudoconvessità di una superficie dovuta ad Eugenio Elia Levi.

6 – ALCUNE CONSEGUENZE DEL CORSO E QUALCHE CONCLUSIONE

Il corso sembra dunque essere un profondo ripensamento di quanto già provato da Renato nel corso degli anni Trenta, soprattutto in relazione al campo di validità del teorema di estensione di Hartogs (cfr., *e.g*., Tomassini 2011, p. 14) sia al caso olomorfo che al caso meromorfo (Vesentini 1991), e un punto di partenza per i risultati che avrebbe conseguito nel 1949 nell’ultimo suo lavoro dedicato alle più variabili complesse e per talune ricerche che avrebbe ispirato a Scorza Dragoni e ai suoi allievi.

Scrive infatti Scorza Dragoni (1949):

> *In questa nota inizio lo studio di una questione topologica suggerita a Caccioppoli dal così detto teorema di continuità per l’insieme dei punti singolari di una funzione di variabile complessa.*

Si tratta in effetti di studiare le proprietà di “continuità” (cioè di chiusura e di indecomponibilità in due chiusi a intersezione disgiunta) di insiemi di punti singolari in più dimensioni, a partire dallo studio delle intersezioni di tali insiemi con varietà lineari di dimensione inferiore, individuate da opportuni parametri, e da deboli proprietà di dipendenza di tali intersezioni dai parametri.

Sulla stessa tematica indirizza Giorgio Trevisan (1949) e soprattutto Enrico Magenes (1948-1949, 1949, 1950).

Anni dopo (1988) Scorza Dragoni tornerà sulla questione e scriverà:

> *Non è molto facile fare congetture su una congettura di Caccioppoli, specialmente quando l’unico dato a disposizione sia quello in un certo qual senso negativo dovuto a Magenes non aveva indotto Renato a disarmare e e a rinunciare alle sue idee circa eventuali conseguenze del teorema di continuità per l’insieme dei punti singolari delle funzioni olomorfe di due variabili complesse. Purtroppo, quando me ne parlò non gli chiesi maggiori chiarimenti e ora mi vedo costretto a brancolare nel buio.*
>
> *Comunque, la mia impressione si è che egli ritenesse di avermi proposto, per il Suo problema, una schematizzazione eccessivamente drastica.*

Anche Magenes, nella sua nota biografica su Scorza Dragoni (1997), quasi cinquant'anni dopo, ricorderà quei lontani eventi.

Le riflessioni sulle formule integrali che appaiono nel corso e che porteranno alla memoria del 1949 (Caccioppoli 1949) sono probabilmente anche legate ai risultati di Martinelli (*e.g.* 1937, 1946), che Caccioppoli aveva apprezzato fin dal 1937 quando, come membro della commissione giudicatrice, aveva contribuito ad assegnare proprio a Martinelli il premio Torelli, bandito dall'Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli.

Di tale memoria Edoardo Vesentini (Vesentini 1991) dà un'analisi profonda.

> *In essa, date due funzioni olomorfe in un dominio del piano di due variabili complesse, Caccioppoli considera l'integrale di Didon (che estende l'indicatore logaritmico di Cauchy ed era già presente nel trattato di analisi di Picard) e dimostra, in condizioni di ragionevole generalità, che il numero delle intersezioni dei luoghi degli zeri delle due funzioni è espresso dall'integrale di Didon esteso ad un ciclo che "separa" i due luoghi. Ma qui l'inadeguatezza dello strumento algebrico-topologico, che presiede alla costruzione di quel ciclo, appesantisce la trattazione ed offusca quel lampeggiare di idee e di intuizioni geniali che contraddistingue i lavori di Caccioppoli.*

L'accenno all'inadeguatezza dello strumento algebrico topologico è un riferimento, peraltro esplicitato, a quanto accadeva in quegli anni nel panorama internazionale: l'utilizzo di nuovi strumenti algebrici e topologici, forgiati a cavallo del secondo conflitto mondiale, stavano sostituendo i metodi della cosiddetta *hard analysis* (cfr., *e.g.*, Rudin 1980) e rivoluzionando l'approccio allo studio delle funzioni di più variabili complesse ad opera soprattutto di Oka, Cartan, Serre.

Proprio nell'anno accademico 1951-1952 si tiene quel celebre Séminaire Cartan che in genere viene considerato uno dei momenti fondamentali di quella rivoluzione (cfr., *e.g.,*Tomassini 2011) che, come accennato, forse contribuì a far cadere l'idea di una pubblicazione del nostro corso.

E' probabile infine che in questo rinato interesse di Renato per la variabile complessa indicato dal nostro corso si debba individuare anche il germe per le ricerche che di lì a qualche anno lo porteranno a introdurre il concetto di funzione pseudoanalitica.

Rimane ancora aperta almeno una questione: Guido Stampacchia, l'attento estensore delle note di questo corso trae da esso qualche ispirazione?

Stampacchia non ha mai prediletto la variabile complessa e lo stesso Caccioppoli nel fargli pervenire un estratto proprio della memoria del 1949 appone su di esso una dedica arguta, forse anche cenno di ringraziamento:

> *A Guido Stampacchia, duro realista, dall'equivocamente complesso Renato Caccioppoli.*

Per trovare traccia di qualche ispirazione occorre allora cercare altrove, più precisamente nell'altro tema, oltre quello del calcolo delle variazioni, che ha sempre coltivato: le equazioni differenziali ordinarie e al quale dedicherà un volume che verrà pubblicato proprio nell'ultimo anno della sua vita (Piccinini et al. 1978)

In effetti in questo settore, per equazioni per le quali non vi è unicità di soluzione in relazione a qualche valore iniziale appare un fenomeno (il cosiddetto baffo di Peano) che consiste proprio nel sussistere della continuità di determinati insiemi. Alla studio di questo fenomeno in un contesto analitico funzionale Stampacchia dedica una sua breve nota ancora del 1949 (Stampacchia 1949). Essa dovette colpire nella sua brevità (è di appena quattro pagine), semplicità, generalità per la sua forza chiarificatrice quanti lavoravano nel campo.

Trent'anni dopo, nella sua nota biografica dedicata a Stampacchia (Magenes 1978), ne dà una descrizione precisa il già citato Enrico Magenes, compagno di studi di Guido alla Scuola Normale Superiore di Pisa, vincitore con lui nel concorso a cattedra di professore ordinario nel 1956 e suo collega in questo ruolo all'università di Genova:

> *La nota si collega con le equazioni differenziali ordinarie perché prende spunto dal cosiddetto «fenomeno di Peano» per darne una formulazione astratta per trasformazioni tra spazi di Banach che siano continue e tali che ogni successione trasformata da T in una successione convergente sia relativamente compatta, e mettere in evidenza che in sostanza il «fenomeno di Peano» (cioè la proprietà che se T-1(y) contiene più di un punto è un «continuo») dipende dal fatto che la trasformazione T sia approssimabile da una successione di trasformazioni Tn invertibili.*

E non a caso il presentatore della nota all'Accademia dei Lincei è proprio Renato Caccioppoli, il cui pensiero sembra quasi far capolini in quelle poche pagine.

Miranda, nella sua qualità di commissario nel concorso a cattedra già citato che vide vincitori Stampacchia e Magenes non potrà fare a meno di sottolineare il valore proprio questa nota (Bollettino 1953).

7 - UN AUGURIO

Al termine di questa introduzione vogliamo augurarci che il lettore di questo corso possa condividere con noi le sensazioni espresse da Edoardo Vesentini (1991) a proposito della lettura degli articoli di Renato Caccioppoli:

> *Molti di quei lavori sono di lettura difficile, ed alcuni susciterebbero oggi le riserve di più di un referee. Ma, a chi voglia e sappia comprenderli, essi offrono la sensazione inebriante di partecipare – a fianco di un ingegno raffinato - alla costruzione di un nuovo capitolo della scienza.*

8 - BIBLIOGRAFIA

Elementi biografici delle persone citate si possono rinvenire per quanto concerne

Federico Cafiero (1914-1980) in (Miranda 1980/81), Carlo Ciliberto (1923-2005) in (Carbone et al. 2007), Donato Greco (1923-1995) in (Sbordone 2020), Ennio De Giorgi (1928-1996) in (Parlangeli 2015), Emilio Gagliardo (1930-2008) in (Magenes 2009), Carlo Miranda (1912-1982) in (Palladino 2011), Paul Montel (1876-1975) in (Dieudonné), Mauro Picone (1885-1977) in (Guerraggio 2018), Giovanni Sansone (1888-1964) in (Rogora 2017), Giuseppe Scorza Dragoni (1908-1996) in (Magenes 1997), Francesco Severi (1879-1961) in (Rogora 2018), Guido Stampacchia (1922-1978) in (Mazzone, 2019) e Magenes (1978). Di Enrico Magenes (1923-2010) manca ancora una biografia soddisfacente; si può far riferimento comunque alla voce presente su Wikipedia.

La bibliografia su Caccioppoli (1904-1959) è molto vasta e varia. Consiste di numerosi articoli su periodici e quotidiani di carattere generale, di libri dedicati alla sua figura, di ricordi personali, di articoli sulla sua produzione scientifica. A lui sono stati dedicati anche un film (*Morte di un matematico napoletano,* 1992, per la regia di Mario Martone) e alcuni documentari.

A titolo orientativo si può rinviare, oltre alla voce del Dizionario Biografico degli Italiani (Figà Talamanca 1973) e al più recente Dell'Aglio (2013), alle opere monografiche a lui dedicate e più precisamente (Alvino et al.1999), (Chiacchio et al. 2009), (Fergola 1994), (Foschini 2022) (Gatto e Toti Rigatelli 2009) (Toma 1992) e alla bibliografia ivi contenuta, ricordando che Alvino et al. 1999) (Chiacchio et al. 2009), (Fergola 1994) sono raccolte di interventi sulla figura di Caccioppoli. Il testo di una conferenza scientifica di Caccioppoli a suo tempo stenografata è contenuto in (Carbone et al.1997) mentre un significativo corpus di sue lettere è contenuto in (Carbone e Talamo 2010).

Alvino A., Carbone L,. Sbordone C. Trombetti G. (curatori) (1999), *In ricordo di Renato Caccioppoli*, Giannini Editore, Napoli.

Bollettino (1953), *Relazione dell commissione giudicatrice del concorso per professore straordinario alla cattedra di analisi matematica (algebrica e infinitesimale) dell'Università di Palermo*, Bollettino ufficiale del Ministero della Pubblica Istruzione, Parte II Atti di Amministrazione, 28, 2193-2202.

Caccioppoli R. (1949), *I fondamenti della teoria delle funzioni analitiche, appunti del corso di analisi superiore,* s.n.., Napoli. L'unica copia nota di quest' opera è custodita presso la Biblioteca Tecnica della Direzione Centrale per la Prevenzione e la Sicurezza Tecnica del Corpo Nazionale dei Vigili del Fuoco di Roma, (codice SBN: RML55), Fondo Salvatore Cuomo.

Caccioppoli R. (s.d.), *Lezioni di Analisi matematica. Prima parte*. Libreria Internazionale Treves, Napoli, edizione in stereotipia a dispense, senza data, ma anteriore al 1950.

Caccioppoli R. (1950), *Lezioni di Analisi matematica. Parte prima*, Libreria Internazionale Treves, terza edizione in stereotipia a dispense, Napoli.

Caccioppoli R. (1951), *Lezioni di Analisi matematica. Parte seconda*, Libreria Interna-

zionale Treves, edizione in stereotipia a dispense, Napoli.
Caccioppoli R. (1963), *Opere*, voll. I, II, Cremonese, Roma.
Cafiero F. (1953), *Funzioni additive di insieme ed integrazione negli spazi astratti,* Liguori, Napoli.
Cafiero F. (1959), *Misura e integrazione*, Cremonese, Roma.
Carbone L., Cardone G., Palladino F. (1997), *Una conferenza stenografata di Renato Caccioppoli*, Rendiconto dell' Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli, (4), 64, 361-396.
Carbone L., Mangoni L., Varvaro A. (2007), *Carlo Ciliberto*, Profili e Ricordi, 29, Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, Napoli
Carbone L., Talamo M. (2010), *Caccioppoli intimo*, Rendiconto dell' Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli, (4), 77, 63-108.
Carbone L., Enea M. R., Palladino N. (2019), *Il fondo Stampacchia*, Rendiconto dell' Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli, (4), 86, 165-198.
Chiacchio F., Giannetti F., Nitsch C. (curatori) (2009), *Renato Caccioppoli: hanno detto di lui*, COINOR, Napoli.
De Giorgi E. (1978), *Guido Stampacchia*, Atti Accademia Nazionale dei Lincei Rendiconto della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, (8) 68 619-625.
Dell'Aglio L. (2013), *Renato Caccioppoli*, in *Il contributo italiano alla storia del Pensiero – Scienze,* Istituto dell'Enciclopedia Italiana Treccani.
Dieudonné J. (1970-1980), *Paul Montel*, in Dictionary of Scientific Biography, Charles Scribner's Sons, New York.
Fergola P. (1994)*, Sulla figura di Caccioppoli*, a cura di P. Fergola, RISMA,Dipartimento Di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli».
Fichera G. (1999), *L'analisi matematica in Italia tra le due guerre*, Rend. Mat. Acc. Lincei (9), 10, 272-312 e ora anche in Carbone L., Ricci P. E., Sbordone C., Trigiante D (curatori)*., Gaetano Fichera. Opere storiche, biografiche, divulgative,* Giannini, Napoli, 2002, 409-442.
Figà Talamanca A. (1973), *Renato Caccioppoli*, Dizionario Biografico degli Italiani*, ad vocem*.
Foschini L. (2022), *L'attrito della vita. Indagine su Renato Caccioppoli, matematico napoletano*, La Nave di Teseo, Milano.
Gatto R., Toti Rigatelli L. (2009), *Renato Caccioppoli. Tra mito e storia*, Sicania, Messina
Greco D. (1965), *Complementi di Analisi*, Liguori, Napoli.
Guerraggio A. (2018), *Mauro Picone,* Dizionario Biografico degli Italiani*, ad vocem.*
Magenes E. (1948-1949), *Proprietà topologiche di certi insiemi di punti e teoremi di esistenza di punti uniti in trasformazioni plurivalenti di una r-cellula in sé,* Giornale di Matematiche (di Battaglini) , (4) 78, 168-171.
Magenes E. (1949), *Un criterio di esistenza di punti uniti in trasformazioni topologiche piane,* Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, 18, 68-114.

Magenes E (1950). *Un'osservazione sui teoremi di esistenza di punti uniti in trasformazioni plurivalenti di una n-cella*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università dii Padova, 19, 108-113.

Magenes E . (1978) *Guido Stampacchia*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 15-A, 715-756.

Magenes E. (1997), *Giuseppe Scorza Dragoni,* Atti Accademia Nazionale dei Lincei Rendiconto della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, (9), 7 supplemento, 69-87.

Magenes E. (2009), *Emilio Gagliardo*, Notiziario dell'Unione Matematica Italiana, 36, 3, 29-30.

Martinelli E. (1937), *La formula di Cauchy per le funzioni analitiche di due variabili complesse,* Atti Accademia Nazionale dei Lincei Rendiconto della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, (6), 25, 33-36.

Martinelli E: (1946*), Formule integrali e topologia nella teoria delle funzioni di più variabili complesse,* Pontificiae Academiae Scientiarum Acta, 9, 235-250.

Mazzone S. (2019), *Guido Stampacchia*, Dizionario Biografico degli Italiani*, ad vocem*.

Miranda C. (1949), *Problemi di esistenza in Analisi funzionale*, Quaderni matematici della Scuola Normale Superiore, 3, Pisa, ristampa 1975.

Miranda C. (1980/81), *Federico Cafiero*, Rendiconto dell' Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli, (4), 48, 9-16.

Palladino F. (2011), *Carlo Miranda*, Dizionario Biografico degli Italiani*, ad vocem*.

Parlangeli A. (2015), *Uno spirito puro. Ennio De Giorgi, genio della matematica*, Milella, Lecce.

Piccinini L. C. (2016*), Al suo grande maestro Ennio De Giorgi*, Milella, Lecce.

Picccinini L. C., Stampacchia G., Vidossich G. (1978), *Equazioni differenziali in* R^n *(problemi e metodi),* Liguori*, Napoli.*

Rogora E. (2018), *Francesco Severi*, Dizionario Biografico degli Italiani*, ad vocem*.

Rogora E. (2017), *Giovanni Sansone*, Dizionario Biografico degli Italiani*, ad vocem*.

Rudin W. (1980), *Function Theory in the Unit Ball of* C^n, Grundlehren. der mathematischen Wissenschaften. 241, Springer, New York-Heidelberg-Berlin.

Sansone G. (1947), *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa*, vol. I, CEDAM, Padova.

Sbordone C. (2020), *Donato Greco*, Rendiconto dell'Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli, (4), 87.

Scorza Dragoni G. (1948-1949), *Su una questione di topologia*, Giornale di Matematiche (di Battaglini), (4) 78, 121-127.

Scorza Dragoni G. (1988), *Renato Caccioppoli e la teoria di due o più variabili complesse*, in *Il Pensiero matematico del XX secolo e l'opera matematica di Renato Caccioppoli,* Atti del convegno in Pisa (1987), Istituto Italiano per gli Studi Filosofici, Napoli, 103-113.

Stampacchia G. (1949), Le trasformazioni che presentno il fenomeno di Peano, Atti

Accademia Nazionale dei Lincei Rendiconto della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, (8) 7, 80-84.

Tomassini G. (2011), *Analisi complessa*, Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi della Scuola Normale Superiore, Edizione Nazionale Mathematica Italiana, 1-54. http://mathematica.sns.it/opere\\/398

Toma P. A. (1992), *Renato Caccioppoli. L'enigma*, Edizioni Scientifiche Italiane, Napoli, 1992.

Trevisan G. (1949), *Su una questione di topologia,* Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova , 18, 231-233.

Vesentini E. (1991), *Renato Caccioppoli e l'analisi complessa*, Ricerche di Matematica, 40 supplemento, 119-128.

Le edizioni delle Lezioni di Analisi matematica Caccioppoli s.d., Caccioppoli 1950, Caccioppoli 1951 non sono presenti sul sito OPAC catalogo SBN. Le copie consultate sono appartenute ad alcuni studenti dei corsi di Caccioppoli della fine degli anni Quaranta: la prima, attualmente di proprietà del nipote Fausto Acanfora, a Vito Aiello, la seconda e la terza, attualmente di proprietà del nipote Giampiero Esposito, a Giovanni Smacchia.

È infine un piacere per noi ringraziare le bibliotecarie Maria Rosaria Bellavita, Ivana Stazio e Anna Colucci, le prime due del Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini", la terza del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli" dell'Università di Napoli "Federico II" per il prezioso aiuto nelle ricerche bibliografiche. Lo stesso caldo ringraziamento va ai dottori Emmanuele Battista e Vito Flavio Bellino.

Segnaliamo esplicitamente che il testo di questa introduzione riprende in buona misura un articolo degli autori pubblicato nel volume 88 del Rendiconto dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche, pp. 103-117 (2021).

RENATO CACCIOPPOLI: UN CORSO DI TEORIA DELLE FUNZIONI

GIUSEPPE TOMASSINI

Introduzione

Il fenomeno cruciale che diversifica la teoria delle funzioni olomorfe in più variabili da quella delle funzioni in una variabile è, come noto, espresso dal *Teorema di estensione* di Hartogs. Menzionato da Osgood nel suo libro [1] come "uno dei fatti più stupefacenti della teoria", esso afferma che se K è un compatto di un dominio D di $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, e $D \backslash K$ è connesso, allora ogni funzione olomorfa su $D \backslash K$ si estende con una funzione olomorfa su D.

Il "fenomeno di Hartogs" per le funzioni olomorfe e più generalmente per gli oggetti analitici – quelli definiti mediante le funzioni olomorfe – diviene così uno dei temi centrali delle ricerche in analisi complessa, con una portata che va ben oltre la teoria delle funzioni di più variabili. Notevole è, ad esempio, la sua generalizzazione ai sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali e a coefficienti costanti in $\mathbb{R}^n$ dovuta a Ehrenpreis [2], così come il legame con il sistema di "Cauchy-Riemann tangenziale" [3] che diventerà un prototipo importante nello studio dei sistemi sovradeterminati di equazioni differenziali lineari del primo ordine [4].

Al teorema di Hartogs e alle sue applicazioni è dedicata l'ultima parte del corso: quella, a mio avviso, più interessante. Interpretandolo suggestivamente come un *Teorema della continuità delle singolarità*, Caccioppoli ne fa lo strumento principale per lo studio delle singolarità delle funzioni olomorfe, la pseudoconvessità di Eugenio Elia Levi, l'olomorfia e la meromorfia separata e le funzioni meromorfe sullo spazio proiettivo.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 32Q99, 32C35.

[1] W. F. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie II.1*, B. G. Teubner, Leipzig 1924.

[2] L. Ehrenpreis, *A new proof and an extension of Hartogs' theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 507–509.

[3] crf.: F. Severi, *Lezioni sulle funzioni analitiche di più variabili complesse*, Cedam-Casa editrice dott. Antonio Milani, Padova 1958. Tenute nel 1956-1957 all'Istituto Nazionale di Alta Matematica in Roma; E. Martinelli, *Sulla determinazione di una funzione analitica di più variabili complesse in un campo, assegnatane la traccia sulla frontiera*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 55 (1961), 191–202.

[4] H. Lewy, *On the local character of the solutions of an atypical linear differential equation in three variables and a related theorem for regular functions of two complex variables*, Ann. of Math. (2) 64 (1956), 514—522.

È un *metodo geometrico* che viene seguito sistematicamente, sia nell'impostazione dei problemi sia nelle dimostrazioni: forse il merito principale di queste sue lezioni.

Ne risulta complessivamente un corso di non facile lettura ma denso di materiali ed elementi originali, che permettono di esplorare, a volte con fatica per la mancanza di un linguaggio algebrico-geometrico adeguato, i principali fatti di un corso base sulla teoria delle funzioni di più variabili complesse.

Mi piace pensare che l'analisi dei vari capitoli che faremo più avanti possa confermare nel lettore questo giudizio.

Qualche riflessione sui singoli capitoli

Volendo conservare lo spirito delle lezioni, gli enunciati principali del corso sono qui riportati con le stesse parole usate da Caccioppoli, salvo usare ove necessario la simbologia divenuta oggi di uso comune.
Il corso si articola in cinque parti. Dopo aver esteso alle più variabili i primi teoremi classici di una variabile (formula di Cauchy, teoremi di Goursat, di Weierstrass, ecc.), si dimostrano alcuni interessanti risultati sui campi di convergenza delle serie di potenze in n variabili complesse $z_1, z_2, \dots, z_n$.

La seconda parte riguarda l'integrazione, ma senza usare il linguaggio delle forme differenziali la trattazione risulta un po' macchinosa.

La terza parte riguarda lo studio dei *punti all'infinito* che vengono trattati in due modi distinti: usando le parole di Caccioppoli, secondo *il punto di vista dell'analisi*, cioè compattificando $\mathbb{C}^2$ con $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ o secondo *il punto di vista della geometria*, cioè compattificando $\mathbb{C}^2$ con $\mathbb{P}^2$.

Allo scopo di stabilire analogie con il caso di una variabile, viene introdotta la varietà di Segre che nel caso delle due variabili rappresenta $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^8$. Di tale varietà si mettono in evidenza varie proprietà, nello stile e con il linguaggio dell'epoca, che conducono Caccioppoli a stabilire una corrispondenza biunivoca senza eccezioni tra i punti del piano proiettivo complesso e i punti reali della varietà di Segre. Pertanto:

> *la varietà di Segre, con i suoi punti reali rappresenta per una coppia di variabili complesse ciò che la sfera, con i suoi punti reali rappresenta per una sola variabile complessa. Dal punto di vista geometrico si ha così la naturale estensione della sfera complessa nel campo delle due variabili complesse* [5].

[5] R. Caccioppoli, *Teoria delle funzioni di più variabili complesse, a.a. 1947-48*, p. 65.

Sono considerazioni che troverebbero la loro collocazione naturale nel capitolo delle varietà complesse, argomento che esulava dai corsi universitari dell'epoca.

La parte contiene inoltre l'enunciato che segue e per la cui dimostrazione occorre usare il teorema di estensione di Hartogs che verrà dimostrato in seguito:

> *indipendentemente dal modo di definire i punti all'infinito nello spazio delle più variabili complesse, può essere enunciato nei seguenti termini: se una funzione analitica è regolare all'infinito allora è costante* [6].

La quarta parte tratta inizialmente del teorema delle funzioni implicite. Dopo aver introdotto, nell'intorno dell'origine, i rami di una funzione olomorfa definita implicitamente da un'equazione $f(x, y) = 0$ con f olomorfa e $f(0, 0) = 0$, si arriva alla dimostrazione del classico teorema della funzione inversa nel caso olomorfo. Sorprende un po' il fatto che, nonostante venga citato, l'analogo differenziabile del teorema della funzione inversa non venga usato per dedurre direttamente il teorema nel caso olomorfo.

Si studiano poi le applicazioni olomorfe e si dimostra la proprietà che il differenziale di un'applicazione olomorfa è conforme su ogni retta complessa.

Le dimostrazioni sono svolte con mezzi analitici elementari, ma, come già osservato, la mancanza di un quadro algebrico-geometrico appropriato rende tutto un po' macchinoso.

Infine, dopo aver dimostrato il teorema di preparazione di Weierstrass, si studia il problema della divisibilità per le funzioni olomorfe.

Il teorema di Hartogs e le singolarità

È il tema che occupa la quinta parte del corso, decisamente la più interessante. Essa contiene la dimostrazione del teorema di estensione di Hartogs, lo studio delle singolarità, la pseudoconvessità di Levi e il teorema di Hartogs sull'olomorfia separata.

La definizione di punto singolare viene data mimando la situazione di una variabile. Se f è olomorfa in $C \setminus S$ dove C è un campo (o dominio) di $\mathbb{C}^n$ e S un chiuso di C, 'par abus de langage' S è chiamato l'*insieme dei punti singolari* di f. Un punto $a \in S$ si dice una *singolarità apparente o eliminabile* se localmente in a, f si prolunga su S. In generale, S è un insieme magro o soddisfa particolari ipotesi (compattezza, convessità, ecc.). I problemi di

[6] *Ivi*, p. 73.

eliminazione delle singolarità sono chiamati *problemi di riassorbimento delle singolarità da parte del campo di olomorfia* [7].

Lo studio esposto in questa parte sfrutta in modo sistematico quello che Caccioppoli chiama *Teorema della continuità delle singolarità*.

Esso poggia su uno dei vari risultati di Hartogs sull'estensione di funzioni olomorfe che richiamiamo esplicitamente.

Consideriamo per semplicità il caso bidimensionale e denotiamo con $\mathbb{C}_x$ e $\mathbb{C}_y$ i piani delle variabili complesse x e y. Siano $C_1 \subset C_x$, $C_2 \subset C_y$, $H \subset C_2$ campi, dove C_1 ha frontiera FC_1 regolare. Allora:

> *Se una funzione f verifica le condizioni*
>
> *a) è olomorfa in $C_1 \times H$ e continua sulla frontiera*
>
> *b) per ogni $x \in FC_1$, $f(x, y)$ è olomorfa rispetto a $y \in C_2$*
>
> *allora f è olomorfa nel campo prodotto $C = C_1 \times C_2$* [8].

La dimostrazione di questo enunciato è uno dei piccoli miracoli della formula di Cauchy.

Consideriamo infatti la funzione $\widetilde{f}$ definita dall'integrale di Cauchy

$$\widetilde{f}(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi \in FC_1} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x} d\xi.$$

Come si constata subito, dalle ipotesi fatte segue che $\widetilde{f}$ è olomorfa in C e, per la formula di Cauchy, coincide con f su $C_1 \times H$. Dunque $\widetilde{f}$ è un prolungamento olomorfo di f.

Si osservi che il complementare di $(C_1 \times H) \cup (FC_1 \times C_2)$ non è compatto cioè "le funzioni olomorfe in più variabili possono colmare lacune non compatte".

Il Teorema della continuità delle singolarità deriva dal risultato precedente come semplice applicazione:

> *Se sulla retta complessa $y = y_0$ la funzione $f = f(x, y)$ presenta singolarità costituenti un compatto interno ad un campo C_1 di $\mathbb{C}_x$ allora esiste un intorno U del punto y_0 in $\mathbb{C}_y$ tale che, per $y' \in U$ la funzione presenti ancora singolarità interne a C_1.*

Un enunciato analogo vale in $\mathbb{C}^n$.

Una prima applicazione del precedente teorema fornisce un criterio abbastanza generale "sull'assorbimento delle singolarità":

---

[7] *Ivi*, p. 100.
[8] *Ivi*, p. 103.

Una funzione f, olomorfa in un campo C di $\mathbb{C}^n$ privato di una sottovarietà regolare S, si prolunga su C in modo olomorfo se vale una delle seguenti condizioni:

1) f è continua e S ha dimensione $2n-1$

2) f è limitata e S ha dimensione $2n-2$

3) S ha dimensione $\leq 2n-3$ [9].

Come seconda applicazione si dimostra il celebre teorema di Hartogs, già citato nell'Introduzione, che negli *Appunti* viene enunciato così:

Se, nello spazio a quattro dimensioni, una varietà [connessa n.d.a.] V, tridimensionale, è la frontiera di una porzione T, limitata di spazio, e se su [un intorno connesso di n.d. a] di V la funzione $f(x,y)$ è olomorfa, essa è prolungabile in tutto T [10].

Fatte le precisazioni necessarie sulla connessione, per la dimostrazione si applica il teorema della continuità delle singolarità, osservando preliminarmente che possiamo supporre V regolare. Allora, poiché V è compatto, esiste una retta complessa, che possiamo supporre di equazione $x = 0$, con almeno un punto sulla varietà, ma nessun punto in comune con T. Detto $I \subset T$ l'insieme compatto dove f non è olomorfa, si considerino rette complesse di equazione $x = \varepsilon$ con ε reale. Se per assurdo fosse $I \not\equiv \varnothing$ verrebbe violato il teorema di continuità delle singolarità.

L'estensione al caso n-dimensionale è immediata.

Il teorema di Hartogs, oltre che nel già citato libro di Osgood, ha avuto nel corso degli anni varie dimostrazioni (cfr. ad esempio Severi [11], Ehrenpreis [12], Fichera [13], Martinelli [14], Hörmander [15]).

Negli Appunti viene ricordato, senza dimostrarlo, un teorema di Caccioppoli sull'insieme S delle singolarità di una funzione olomorfa di due variabili in aperti dello spazio proiettivo [16]. Esso afferma che, sotto ipotesi di regolarità, S è un continuo o equivalentemente

[9] *Ivi*, p. 106.

[10] *Ivi* p. 107.

[11] F. Severi, *Lezioni sulle funzioni analitiche di più variabili complesse*, CEDAM, Padova 1958.

[12] L. Ehrenpreis, *A new proof and an extension of Hartogs' theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 507–509.

[13] G. Fichera, *Caratterizzazione della traccia, sulla frontiera di un campo, di una funzione analitica di più variabili complesse*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 22 (1957), 707–715.

[14] E. Martinelli, *Op. cit.*

[15] L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London 1966.

[16] *Ivi*, p. 108.

per una funzione olomorfa di due variabili risulta connesso non solo il campo di esistenza, ma anche il campo complementare[17].

Curiosamente, negli appunti non appare mai una definizione di *campo di esistenza* di una funzione olomorfa che, come noto, deve tener conto della *polidromia*.

Il Caso Meromorfo

Il teorema di Hartogs è stato generalizzato da Levi alle funzioni meromorfe. La dimostrazione segue la stessa linea del caso olomorfo.

Il primo passo è la generalizzazione del risultato dimostrato all'inizio del paragrafo. Conservando le stesse notazioni, si ha:

Se una funzione f verifica le condizioni

a) è meromorfa in $C_1 \times H$ e continua sulla frontiera

b) per ogni $x \in FC_1$, $f(x, y)$ è olomorfa rispetto a $y \in C_2$

allora f è meromorfa nel campo prodotto $C = C_1 \times C_2$ [18].

Per l'ipotesi b) l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\xi \in FC_1} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x} d\xi$$

definisce una funzione olomorfa su C. Si considera allora la differenza

$$F(x, y) = f(x, y) - \widetilde{f}(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi \in FC_1} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x} d\xi$$

e si dimostra che $F(x, y)$ è meromorfa nel campo prodotto C.

Questo risultato permette di enunciare un teorema di continuità delle "singolarità essenziali" [19] che, applicato come nel caso olomorfo, conduce al teorema di estensione per le funzioni meromorfe:

Se C è un campo di $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ e K un compatto tale che $C \setminus K$ sia connesso, una funzione meromorfa in $C \setminus K$ ha un'estensione meromorfa su C.

---

[17] R. Caccioppoli, *Sulla distribuzione delle singolarità delle funzioni di due variabili complesse*, Atti del I Congresso dell'U.M.I. (1937) 183-186; Opere Scelte, U.M.I., 2, 174-177.

[18] R. Caccioppoli, *Teoria delle funzioni di più variabili complesse*, cit., p. 109.

[19] *Ivi*, p. 112.

Ne segue che una funzione meromorfa nell'intorno di un iperpiano proiettivo di $\mathbb{P}^n$, $n \geq 2$, si estende su $\mathbb{P}^n$.

Seguono poi altre considerazioni sulle singolarità essenziali delle funzioni meromorfe sempre sfruttando il teorema di continuità.

La Pseudoconvessità di Levi

L'altro tema annunciato all'inizio del paragrafo è quello della pseudoconvessità di Levi, concetto legato alla descrizione delle ipersuperfici in $\mathbb{C}^2$ che possono essere frontiere di campi di esistenza di funzioni olomorfe o meromorfe. È il problema considerato da Levi nel secondo dei suoi due fondamentali lavori sulla teoria delle funzioni olomorfe di più variabili [20].

Seguendo le idee di Levi, si danno preliminarmente, in modo geometrico, le nozioni di *pseudoconvessità* di una ipersuperficie regolare Σ.

Sia $p \in \Sigma$. Σ divide localmente lo spazio in due regioni rispettive U e V, tali che $FU \cap FV \cap \Sigma$ sia un intorno di p in Σ. L'ipersuperficie viene detta *pseudoconvessa in senso stretto in p verso U (rispettivamente verso V)* se esiste una curva olomorfa locale per p che giace tutta (escluso il punto p) in U (rispettivamente in V). L'ipersuperficie si dice *pseudoconvessa in senso largo in p verso U (rispettivamente verso V)* se ogni curva complessa per p ha punti in comune con U (rispettivamente con V).

Applicando ancora una volta il teorema di continuità si dimostrano i due principali teoremi di Levi [21]:

> *Condizione necessaria affinché Σ divida localmente lo spazio in due regioni di cui una sia dominio di esistenza di una funzione olomorfa è che essa sia pseudoconvessa in senso largo in ogni suo punto.*
>
> *Se Σ è strettamente pseudoconvessa in un punto* p *allora localmente in* p *divide lo spazio in due regioni di cui una è dominio di esistenza di una funzione olomorfa.*

Viene successivamente data la caratterizzazione analitica della pseudoconvessità mediante *l'espressione differenziale* $L = L(\phi)$ di Levi [22].

---

[20] E. E. Levi, *Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabiili complesse,* Ann. di Mat. pura e applicata, Tomo XVII, s. III (1909), 61–88; *Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse*, Ann. di Mat. pura e applicata, Tomo XVIII, s. III (1911), 69–79.

[21] R. Caccioppoli, *Teoria delle funzioni di più variabili complesse*, cit., p. 119.

[22] *Ivi*, p. 119.

Da segnalare che negli enunciati 1) e 2) di pagina 119 degli Appunti andrebbe precisato che, se $L(\phi) \geq 0$, la regione che può essere dominio d'esistenza di una funzione olomorfa è quella definita da $\phi < 0$.

Se $L(\phi) \equiv 0$ su Σ, si dice che Σ è un *iperplanoide* e si può allora dimostrare che esso è un luogo di curve olomorfe disgiunte e divide localmente lo spazio in due regioni che possono essere entrambe domini di esistenza di funzioni olomorfe.

La nozione di pseudoconvessità così come la condizione di Levi si generalizzano ai campi di $\mathbb{C}^n$.

I teoremi di Levi hanno dato luogo a numerose ricerche aventi per oggetto le seguenti questioni, note in letteratura come *Problema di Levi*:

i) un dominio $D \subset \mathbb{C}^n$ a bordo differenziabile e pseudoconvesso in senso largo è dominio di esistenza?

ii) un dominio $D \subset \mathbb{C}^n$ che sia localmente di esistenza nei punti del bordo è di esistenza?

Esse hanno avuto risposta positiva all'inizio degli anni '50, grazie ai lavori di Oka, Bremermann, Grauert, Norguet.

Il problema di Levi ha avuto una grande influenza nelle ricerche in analisi complessa; nella categoria più ampia delle varietà complesse con singolarità esso costituisce tuttora un problema aperto.

Olomorfia e Meromorfia Separata

Segue la dimostrazione di un altro fondamentale teorema di Hartogs sull'olomorfia separata [23]. Limitandoci alle due variabili esso recita:

> *Una funzione di due variabili complesse $f(x, y)$, analitica separatamente, rispetto alla x in un campo A_1 del piano delle x e rispetto alla y in un campo A_2 del piano delle y, è una funzione analitica nelle due variabili nel campo A, prodotto di A_1 e A_2* [24].

La dimostrazione è di per sé tecnicamente molto complicata [25]. Negli Appunti si utilizzano due risultati intermedi: un lemma di Osgood che dimostra il teorema

[23] F. Hartogs, *Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten*, Math. Ann., 62 (1906), 1–88.

[24] R. Caccioppoli, *Teoria delle funzioni di più variabili complesse*, cit., p. 124.

[25] R. Narasimhan, *Several Complex Variables*, Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London 1971.

nell'ipotesi aggiuntiva che la funzione sia limitata [26], e un lemma di Hartogs secondo cui:

> *ogni prolungamento olomorfo effettuato rispetto ad una sola variabile equivale a un prolungamento rispetto al complesso delle variabili* [27].

La dimostrazione data da Caccioppoli non è di facile lettura. Anche se sono messi in evidenza i due punti principali, le considerazioni tecniche sono espresse in un flusso continuo che non rende semplice comprendere la dimostrazione.

Il teorema di Hartogs sopra enunciato è stato esteso da Caccioppoli alle funzioni separatamente meromorfe di due variabili [28].

Funzioni Meromorfe sullo Spazio Proiettivo

Gli Appunti si concludono con la dimostrazione del teorema di Weierstrass sulla razionalità delle funzioni meromorfe sullo spazio proiettivo:

> *Una funzione meromorfa in tutto lo spazio, infinito compreso, è una funzione razionale.*

Diamo un cenno della dimostrazione. Si fissa un'origine per le coordinate x, y in cui la funzione f in questione sia olomorfa e si suppone, come lecito, che per ogni x (rispettivamente y) di un intorno C_1 (rispettivamente C_2) dell'origine del piano delle x (rispettivamente del piano delle y) la funzione $f(x, y)$ della sola y (rispettivamente della sola x) sia regolare all'infinito. Pertanto:

$$f(x,y) = \frac{a_0(x)y^m + a_1(x)y^{m-1} + \cdots + a_m(x)}{y^n + b_1(x)y^{n-1} + \cdots + b_n(x)}.$$

Procedendo come nella dimostrazione del teorema di Levi sull'estensione delle funzioni meromorfe, si vede che le funzioni a_i, b_j sono olomorfe nella x. Scambiando i ruoli di x e y si ha analogamente:

$$f(x,y) = \frac{c_0(y)x^p + c_1(y)x^{p-1} + \cdots + c_p(y)}{x^q + d_1(y)x^{q-1} + \cdots + d_q(y)}$$

[26] R. Caccioppoli, *Teoria delle funzioni di più variabili complesse*, cit., p. 129.

[27] *Ivi*, p. 125.

[28] R. Caccioppoli, *Un teorema generale sulle funzioni di due variabili complesse*, Rend. Acc. Lincei, 19 (1934), 699–703.

dove le funzioni c_h, d_k sono olomorfe. Sviluppando in serie di potenze le funzioni a_i, b_j, c_h, d_k e tenendo conto che per $(x.y) \in C_1 \times C_2$ le due frazioni devono coincidere, si ha subito che le funzioni a_i, b_j, c_h, d_k sono polinomi e quindi che f è razionale.

Dal teorema di Weierstrass, tenuto conto del teorema di Levi sull'estensione delle funzioni meromorfe, si ottiene:

Una funzione meromorfa su una retta complessa è razionale.

Come altra applicazione si dimostra che le trasformazioni pseudoconformi del piano proiettivo complesso sono proiettive.

APPENDICE A

Articoli di R. Caccioppoli sulla analisi complessa

Le Opere Scelte, a cura dell'U.M.I., furono pubblicate nel 1963 da Ed. Cremonese, Roma

[1] Caccioppoli R. (1932), *Sui funzionali lineari nel campo delle funzioni analitiche*, Rend. Acc. Naz. Lincei, (6), 15, 713-714; Opere Scelte, 2, 30-33.

[2] Caccioppoli R. (1933), *Sulle funzioni meromorfe di due variabili complesse*, Boll. U.M.I., (1), 12, 309-313; Opere Scelte, 2, 84-87.

[3] Caccioppoli R. (1933), *Sulle famiglie normali di funzioni analitiche di due variabili*, Rend. Sem. Mat. Padova, 44, 111-121; Opere Scelte, 2, 88-97.

[4] Caccioppoli R. (1934), *Sui teoremi di esistenza di Riemann*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, (4), 4, 49-54; Opere Scelte, 2, 106-112.

[5] Caccioppoli R. (1934), *Un teorema generale sulle funzioni di due variabili complesse*, Rend. Acc. Naz. Lincei, (6), 19, 699-703; Opere Scelte, 2, 113-117.

[6] Caccioppoli R. (1934), *Intégrales doubles de Cauchy et fonctions monogènes généralisées*, C. R. Ac. Sci. Paris, 198, 2227-2229; Opere Scelte, 2, 118-120.

[7] Caccioppoli R. (1934), *Le funzioni monogene generalizzate definite mediante integrali doppi di Cauchy*, Rend. Sem. Mat. Padova, 5, 122-147; Opere Scelte, 2, 121-142.

[8] Caccioppoli R. (1934), *Sul prolungamento analitico delle funzioni di due variabili complesse*, Bol. U.M.I., (1), 13, 209-212; Opere Scelte, 2, 143-145.

[9] Caccioppoli R. (1937), *Sulla distribuzione delle singolarità delle funzioni di due variabili complesse*, Atti del I Congresso dell'U.M.I., 183-186; Opere Scelte, 2, 174-177.

[10] Caccioppoli R. (1938), *Sui teoremi di esistenza di Riemann*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (2), 7, 177-187; Opere Scelte, 2, 178-191.

[11] Caccioppoli R. (1949), *Residui di integrali doppi e intersezioni di curve analitiche*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), 29, 1-14; Opere Scelte, 2, 246-262.

APPENDICE B

Autori italiani di lezioni o libri di analisi complessa, in ordine cronologico, dal 1860 alla data della morte di R. Caccioppoli (8 maggio 1959).

[1] Betti E. (1860), *La teorica delle funzioni ellittiche*, Ann. Mat. Pura Appl., 3, 65-159; (1860), ibid., 3, 298-310; (1861), ibid., 4, 26-45; (1861), ibid., 4, 57-70; (1861), ibid., 4, 297-336.

[2] Rubini R. (1863), *Teoria delle funzioni ellittiche*, Giornale di Matematiche, 1, 33-40, 118-122, 140-147, 291-304.

[3] Brioschi F. (1864), *Lezioni sulla teoria delle funzioni Jacobiane ad un solo argomento*, Giornale di Matematiche, 2, 8-12, 33-39, 129-134.

[4] Casorati F. (1868), *Teorica delle funzioni di variabili complesse*, Fratelli Fusi, Pavia.

[5] Pincherle S. (1880), *Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principi del Prof. C. Weierstrass compilato dal dott. S. Pincherle*, Benedetto Pellerano, Napoli.

[6] Pascal E. (1896), *Teoria delle funzioni ellittiche*, Hoepli, Milano.

[7] Bianchi L. (1898), *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche*, Edizione litografica, Spoerri, Pisa; (1901), Edizione a stampa, Spoerri, Pisa.

[8] Pincherle S. (1899), *Lezioni sulla teoria delle funzioni analitiche dettate nella R. Università di Bologna dal professore Salvatore Picherle, raccolte per cura del dottor Amerigo Bottari*, Litografia Sauer e Borigazzi, Bologna.

[9] Vivanti G. (1901), *Teoria delle funzioni analitiche*, Hoepli, Milano.

[10] Pincherle S. (1902), *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche, parte seconda, appunti della signorina Maria Sittignani*, s.n., Bologna.

[11] Vivanti G. (1906), *Elementi della teoria delle funzioni poliedriche e modulari*, Hoepli, Milano.

[12] Fubini G. (1908), *Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe*, Spoerri, Pisa.

[13] Pincherle S. (1922), *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche*, Zanichelli, Bologna.

[14] Bagnera G. (1927), *Lezioni sopra la teoria delle funzioni analitiche, raccolte dal dottor Giovanni Ricci*, Tenconi, Milano.

[15] Vivanti G. (1928), *Elementi della teoria delle funzioni analitiche e delle funzioni trascendenti intere*, Hoepli, Milano.

[16] Pincherle S. (1931), *Le funzioni analitiche da un punto di vista elementare*, s.n., Milano.

[17] Severi F. (1931), *Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse*, Rend. Sem. Mat. Milano 5, 1-58.

[18] Enriques F. (1934), *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche pubblicate per cura del dottor Oscar Chisini*, Vol. 4, *Funzioni ellittiche ed abeliane*, Zanichelli, Bologna.

[19] Tricomi F. G. (1936), *Funzioni analitiche*, Zanichelli, Bologna.

[20] Tricomi F. G. (1937), *Funzioni ellittiche*, Zanichelli, Bologna.

[21] Conforto F. (1942), *Funzioni abeliane e matrici di Riemann*, Libreria dell'Università di Roma nella Città Universitaria, Roma.

[22] Cipolla M. (1947), *Lezioni sulle funzioni analitiche, tenute da Michele Cipolla e compilate da Giuseppe Mignosi*, Arti Grafiche A. Renna, Palermo.

[23] Sansone G. (1947), *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa*, Voll. 1, 2, prima edizione, CEDAM, Padova.

[24] Severi F. (1947), *Funzioni quasi abeliane*, Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia, Ex Aedibus Academicis in Civitate Vaticana.

[25] Ascoli G. (1949), *Lezioni sulla teoria delle funzioni analitiche*, Società Generale per l'Industria Minerale e Chimica, Gruppo per lo Studio della Fisica, Montecatini.

[26] Caccioppoli R. (1949), *I fondamenti della teoria delle funzioni analitiche, appunti di analisi superiore*, s.n., Napoli.

[27] Spampinato N. (1950), *Lezioni di geometria superiore*, Vol. 7. *Elementi di geometria algebrica e corpogeometria sopra una varietà. Le superficie di Riemann e gl'integrali abeliani*, Raffaele Pironti, Napoli.

[28] Amerio L. (1951), *Funzioni analitiche e trasformazioni di Laplace. Lezioni di complementi di analisi matematica tenute nel Politecnico di Milano, redatte da Giuseppina Pregnolato*, Tamburini, Milano.

[29] Conforto F. (1951), *Funzioni abeliane modulari, raccolte dal dott. Mario Rosati*, DOCET Edizioni Universitarie, Roma.

[30] Tricomi F. G. (1952), *Lezioni sulle funzioni ipergeometriche confluenti, Corso di Analisi Superiore 1951-1952*, Gherardoni, Torino.

[31] Tricomi F. G. (1954), *Funzioni ipergeometriche confluenti*, Cremonese, Roma.

[32] Severi F. (1957), *Lezioni sulle funzioni analitiche di più variabili complesse*, CEDAM, Padova.

[33] Fichera G. (1959), *Funzioni analitiche di una variabile complessa, a cura di Luciano De Vito*, Libreria Eredi Virgilio Veschi, Roma.

L'opera [1] è una monografia relativa alle lezioni di Analisi Superiore tenute da E. Betti nella R. Università di Pisa nell'anno 1859-1860, pubblicata secondo l'uso del tempo in più riprese sulla rivista indicata. Non abbiamo trovato parti successive alla quinta da noi riportata.

L'opera [2] fu concepita dall'autore con intenti pedagogici, ma, alla data della pubblicazione, non era ancora stata usata in corsi regolari. L'opera [3] si basava invece su lezioni date nell'anno 1860-61 nell'Università di Pavia, con modifiche e aggiunte dell'autore.

L'opera [7] fu ripubblicata, in due parti, dall'editore Zanichelli fra il 1928 e il 1930, ma il contenuto dei paragrafi fu identico.

L'opera [17] è un vasto e profondo articolo di rassegna sul quale si è basata molta ricerca italiana sulle più variabili complesse. L'autore dell'opera [21] la chiama *monografia.*

L'unica copia dell'opera [26] è custodita presso la Biblioteca Tecnica della Direzione Centrale per la Prevenzione e la Sicurezza Tecnica del Corpo Nazionale dei Vigili del Fuoco di Roma, codice SBN: RML55.

L'opera [27] apparve dapprima in una edizione di inizio anni Quaranta del Circolo Matematico di Catania, con un numero minore di volumi e di argomenti.

Non sono stati inseriti testi che non fossero dedicati prevalentemente all'analisi complessa.

Dopo la morte di R. Caccioppoli, la letteratura italiana più moderna sulle funzioni di più variabili complesse può ritenersi iniziare con

Andreotti A. (1961), *Quelques points de théorie élémentaire des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes*, rédigés par Philip Artzner, Strasbourg; *Andreotti Selecta*, Tomo 2, Vol. 1, 383-432, UMI, Bologna.

APPENDICE C

Autori citati da R. Caccioppoli nei suoi articoli sulla analisi complessa

[1] Ascoli G. (1932), *Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari*, Ann. Mat., (4), 10, 33-81.

[2] Behnke H., Thullen P. (1934), *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen*, Springer, Berlin.

[3] Bochner S., Martin W. T. (1948), *Several complex variables*, Princeton University Press, Princeton.

[4] Borel E. (1912), *Les séries de fonctions analytiques et les fonctions quasi-analytiques*, Comptes Rendus Heb. Acad. Sci., 154, 1491-1493.

[5] Borel E. (1917), *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe*, Gauthier-Villars, Paris.

[6] Bouligand G. (1928), *Ensembles impropres et nombre dimensionnel*, Bull. Sci. Math., 52, 320-344; ibid. 361-376.

[7] Cimmino M. (1938), *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico sopra una superficie chiusa*, R. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, (4), 7, 73-96.

[8] Fantappié L. (1930), *I funzionali analitici*, Atti R. Acc. Naz. Lincei, Mem. Cl. Sc. Fis. Mat. Nat., (6), 3, 455-683.

[9] Fantappié L. (1931), *I funzionali delle funzioni di due variabili*, Mem. R. Acc. d'Italia Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 2, Matematica: (4).

[10] Hadamard J. (1910), *Sur quelques applications de l'indice de Kronecker*, in Tannery J. (1910), *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, avec une note de M. Hadamard*, Tome II, Hermann, Paris, 437-477.

[11] Hahn H. (1927), *Über lineare Gleichungssystem in linearen Räumen*, Journ. für Math., 157, 214-229.

[12] Hartogs F. (1906), *Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Verändlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten*, Math. Annalen, 62, 1-88.

[13] Julia G. (1926), *Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables*, Acta Math., 47, 53-115.

[14] Klein F. (1882), *Über Riemann's Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, Teubner, Leipzig.

[15] Kneser H. (1932), *Der Satz von dem Fortbestehen der wesentlichen Singularitäten einer analytischen Funktion zweier Veränderlichen*, Jahresbericht der Deutschen Math. Ver., 41, 164-168.

[16] Levi E. E. (1910), *Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse*, Ann. Mat., 17, 61-68.

[17] Levi E. E. (1911), *Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse*, Ann. Mat., 18, 69-80.

[18] Martinelli E. (1937), *La formula di Cauchy per le funzioni analitiche di due variabili complesse*, Atti Acc. Naz. Lincei Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. Nat., (6), 25, 33-36.

[19] Martinelli E. (1946), *Formule integrali e topologia nella teoria delle funzioni di più variabili complesse*, Pontific. Acad. Sci. Acta, 9, 235-250.

[20] Montel P. (1927), *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, recueillies et rédigées par J. Barbotte, Collection de monographies sur la Théorie des fonctions publiées sous la direction de M. Emile Borel, n. 42, Gauthier-Villars, Paris.

[21] Osgood W. F. (1899), *Note über analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen*, Math. Annalen, 52, 462-464.

[22] Osgood W. F. (1913), *Selected topics in the theory of analytic functions of several complex variables*, The Madison Colloquium, Vol. IV of the AMS Colloquium Series.

[23] Osgood W. F. (1929), *Lehrbuch der Funktionentheorie* II, Teubner, Leipzig.

[24] Picard E. (1926), *Traité d'Analyse*, Tome II, Gauthier-Villars, Paris.

[25] Picone M. (1922), *Sopra alcuni problemi d'Analisi Matematica posti dalla Fisica*, Esercitazioni Matematiche, 2, 183-205.

[26] Poincaré H. (1887), *Sur les résidus des intégrales doubles*, Acta Math., 9, 321-380.

[27] Saxer W. (1931), *Sur les familles de fonctions méromorphes de plusieurs variables*, Comptes Rendus Heb. Acad. Sc., 193, 479-480.

[28] Segre B. (1937), *Sull'estensione della formula integrale di Cauchy e sui residui degli integrali n-pli, nella teoria delle funzioni di n variabili complesse*, Atti del I Congresso dell'U.M.I., 174-180.

[29] Severi F. (1927), *Conferenze di geometria algebrica*, Stabilimento Tipolitografico del Genio Civile, Roma.

[30] Severi F. (1933), *Lezioni di Analisi*, Zanichelli, Bologna.

[31] Valiron M. G. (1938), *Familles normales et quasi-normales de fonctions méromorphes*, Mem. Sc. Math., 38, 1-54.

[32] Weyl H. (1923), *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Teubner, Leipzig.

APPENDICE D

Opere dedicate prevalentemente all'analisi complessa presenti nel Fondo Caccioppoli esistente presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli" dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II".

Va ricordato che subito dopo la scomparsa di Renato Caccioppoli il fratello Ugo donò all'allora Istituto di Matematica dell'Università di Napoli i libri di contenuto matematico appartenuti a Renato. L'Istituto, proprio allora intitolato a Renato Caccioppoli, confluì negli anni Ottanta del Novecento nell'attuale Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli" dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II".

Del fondo fu fatto subito dopo la donazione un primo sommario inventario che non ha subito nel seguito modifiche significative.

Nel fondo sono contenute le opere presenti nell'Appendice B e ivi indicate con i numeri 9, 11, 15, 19, 20, 22, 23, 28, 30.

Sono altresì contenute le opere presenti nell'Appendice C e ivi indicate con i numeri 2, 24 (il fondo Caccioppoli contiene invero l'edizione del 1922 dell'opera [24] in Appendice C).

Sono infine presenti le opere di seguito indicate:

[1] Jordan C. (1909), *Cours d'Analyse, Tome I*, Terza Edizione, Gauthier-Villars, Paris; (1913), *Tome II*, Terza Edizione, Gauthier-Villars, Paris.

[2] Burkhardt H. (1920), *Elliptische Funktionen. Dritte vollständig umgearbeitete Auflage besorgt von Dr. George Faber*, Walter de Gruyter, Berlin und Leipzig.

[3] Burkhardt H. (1921), *Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexer Veründlichen. Fünfte vollständig umgearbeitete Auflage besorgt von Dr. George Faber*, Walter de Gruyter, Berlin und Leipzig.

[4] Caratheodory C. (1932), *Conformal Representation*, The University Press, Cambridge.

[5] Saks S., Zygmund A. (1952), *Analytic functions*, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warsaw-Wroclaw.

NOTA EDITORIALE

(i) Sono stati omessi i simboli di correzione presenti nel dattiloscritto originale (delle x apposte sulle singole lettere) ed è stata data direttamente la forma corretta.

(ii) Gli errori di battitura presenti nel dattiloscritto originale (inversione dell'ordine delle lettere in una parola, parole consecutive senza separazione, parole separate in due parti, nomi scritti con refusi) sono stati corretti senza che venissero indicati.

(iii) In caso di forme erronee presenti nel dattiloscritto originale la forma corretta è stata data racchiusa tra parentesi quadre seguita dall'espressione *sic.*

(iv) Nella equazione non numerata che segue l'equazione indicata col numero (12) della Parte II nel dattiloscritto originale l'espressione $dt_1\, dt_4$ è stata modificata in $dt_2\, dt_4$. Nella equazione non numerata che segue l'equazione indicata col numero (2) della Parte III l'espressione $z_0' = az + bz_0$ è stata modificata in $z_0' = az_0 + bz_1$, e l'espressione $z_1' = cz + dz_1$ in $z_1' = cz_0 + dz_1$. Nella seconda equazione non numerata che segue l'equazione indicata col numero (9) della Parte IV è stato aggiunto il segno $-$ dopo il simbolo di eguaglianza. In tali casi non sono state date indicazioni di modifica.

(v) Le rare aggiunte dei curatori sono racchiuse tra parentesi quadre seguite dall'espressione *n.d.c.*

(vi) La punteggiatura è stata riportata dopo la chiusura delle virgolette.

(vii) La tabella riportata è una scansione di quella presente nel dattiloscritto originale, mentre le sei figure, fedeli all'originale, sono state ricreate dalla Dott. Giulia Giannini con l'ausilio delle tecniche moderne per renderle visibili.

R. CACCIOPPOLI

TEORIA DELLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI COMPLESSE

Appunti del corso di **teoria delle funzioni**
tenuto dal Prof. R. CACCIOPPOLI nell'anno
accademico 1947-48.-

PARTE I

Iniziamo col dare qualche simbolo e alcune definizioni preliminari. Per indicare n variabili complesse useremo in generale i simboli: $z_1, z_2, ...z_n$ con $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$ volendo far uso di un linguaggio geometrico non potremo riferirci ad un piano complesso bensì ad uno spazio complesso a $2n$ dimensioni reali, cioè all'iperspazio il cui punto avrà per coordinate i $2n$ numeri reali che si ottengono prendendo, nello ordine, la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di ciascuna variabile $(x_1, y_1, ...x_n, y_n)$. In un primo studio supporremo le coordinate dei punti essenzialmente finite. Vedremo poi come la nozione di infinito può essere introdotta in vari modi. Apparrà allora in che cosa differiscono lo spazio a $2n$ dimensioni immagine delle n variabili complesse e l'S_{2n} proiettivo reale. Per ora resta inteso che ci riferiremo costantemente a punti di uno spazio euclideo a $2n$ dimensioni. Supponiamo note tutte le principali nozioni sugli insiemi di punti di uno iperspazio, come la nozione di intorno, dominio rettangolare circolare etc. Supponiamo per esempio che in uno spazio a $2n$ dimensioni nel quale indichiamo con $(\xi_1 ... \xi_{2n})$ le coordinate di un punto generico, dicesi: **dominio rettangolare** di centro nel punto $(\bar{\xi}_1, ...\bar{\xi}_{2n})$ e semidimensioni $(d_1, d_2, ...d_{2n})$ essendo d_k, $2n$ numeri reali positivi lo insieme dei punti le cui coordinate soddisfano alle relazioni $\left|\xi_k - \bar{\xi}_k\right| \leq d_k$ $(k = 1, 2, ..., 2n)$. Come si vede si ottiene un dominio rettangolare imponendo una limitazione a ciascuna variabile. Naturalmente nulla vieta di prendere in considerazione nel nostro studio siffatti domini. Siccome però le coordinate dei punti del nostro iperspazio sono essenzialmente accoppiate, dipendendo ogni coppia da una variabile complessa, è più conveniente considerare domini ottenuti imponendo limitazioni separate non alle singole coordinate, bensì alle coppie, imponendo in altri termini, limitazioni separate alle singole variabili complesse. Così per esempio, se A_1 è un insieme del piano della variabile z_1, A_2 un insieme del piano di z_2, ..., ed A_n un insieme del piano di z_n, possiamo considerare l'insieme A dei punti $(x_1 y_1 ....x_n y_n)$ dello spazio a $2n$ dimensioni per cui (x_1, y_1) è in A_1, (x_2, y_2) è in A_2, ... (x_n, y_n) è in A_n. Un tale insieme viene chiamato "prodotto" degli insiemi $A_1, A_2, ...A_n$. In particolare se con $c_1, c_2, ...c_n$, indichiamo n domini (ricordiamo che "dominio" è un insieme perfetto, privo di punti che siano di accumulazione di soli punti frontiera) nei piani rispettivamente delle variabili $z_1, z_2 .... z_n$, l'insieme prodotto, ossia l'insieme dei punti $(x_1 y_1, ..., x_n y_n)$ per cui $z_1 \equiv (x_1, y_1)$ è in c_1, $z_2 \equiv (x_2\ y_2)$ è in c_2, ... $z_n \equiv (x_n\ y_n)$ è in c_n, costituisce evidentemente un dominio del nostro spazio a $2n$ dimensioni, dominio che chiameremo "policilindro". Si trae così il "bicilindro" come l'insieme dei punti $(x_1 y_1\ x_2 y_2)$ dello spazio a quattro dimensioni per i quali $(x_1\ y_1)$ varia in un certo dominio c_1 e $(x_2\ y_2)$ in un altro dominio c_2. Se i domini $c_1, c_2, ... c_n$ sono cerchi il policilindro prodotto prende più specificatamente il nome di **policilindro circolare**; secondo tale definizione, l'insieme dei punti, dello spazio a quattro dimensioni per cui è

$$|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \leq r_1; \quad |z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \leq r_2$$

essendo r_1 ed r_2 due numeri reali positivi è un "bicilindro circolare". Ciò premesso, avvertiamo che, in quel che segue ci riferiremo costantemente alle funzioni di due variabili complesse.

L'estensione dei risultati alle funzioni di più di due variabili è, generalmente, immediata. I pochi casi nei quali ciò non è, verranno volta per volta rilevati e l'estensione sarà allora esplicitamente effettuata.

FUNZIONE ANALITICA: sia $w = f(z_1, z_2) = u + iv$ una funzione di due variabili complesse definita per z_1 variabile in un certo insieme A_1 e z_2 in un certo altro insieme A_2 dei loro rispettivi piani complessi. Evidentemente la parte reale u, ed il coefficiente dell'immaginario v, della funzione w sono ambedue funzioni reali delle quattro variabili reali

$$u = u(x_1\ y_1\ x_2\ y_2); \qquad v = v(x_1\ y_1\ x_2\ y_2)$$

definite nell'insieme A dello spazio a quattro dimensioni dei punti $(x_1\ y_1\ x_2\ y_2)$ ottenuto al variare di $(x_1\ y_1)$ in A_1 e di $(x_2\ y_2)$ in A_2 insieme che abbiamo chiamato prodotto dei due insiemi $A_1\ A_2$; supponiamo che A sia un campo. (Si definisce campo un insieme aperto, cioè un insieme al quale non appartiene nessun punto frontiera. Un campo è dunque dotato di soli punti interni) Se (z_1', z_2') è un punto di A, si può parlare di continuità della funzione rispetto a ciascuna variabile. Ma si può anche parlare di limite della funzione per

(z_1, z_2) tendente a (z'_1, z'_2) e di continuità della funzione nel punto (z'_1, z'_2). Le definizioni si formulano facilmente e perciò non ci fermiamo su di esse. Notiamo soltanto che la continuità delle due funzioni u e v importa la continuità della funzione w e viceversa. Allo stesso modo si può parlare di derivabilità parziale della funzione w rispetto a ciascuna delle due variabili z_1 z_2. Si dirà per esempio che la w nel punto (z'_1, z'_2) di A è parzialmente derivabile rispetto a z_1 se la funzione complessa $f(z_1, z'_2)$ della sola variabile complessa z_1 è derivabile nel punto z'_1. Si può dunque parlare di analiticità in A della funzione w rispetto a ciascuna delle variabili. È evidente che l'analiticità della funzione rispetto ad una variabile importa il verificarsi delle condizioni di Cauchy, relative alla variabile stessa in tutto A di modo che l'analiticità di w rispetto ad ambedue le variabili importa il verificarsi in A delle relazioni di Cauchy per ambedue le variabili:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial y_1} \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial y_2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = -\frac{\partial v}{\partial x_1} \qquad \frac{\partial u}{\partial y_2} = -\frac{\partial v}{\partial x_2}. \tag{1}$$

Orbene diremo che una funzione delle due variabili complesse z_1, z_2 è analitica in un campo, se, in esso, la funzione è continua e se è analitica in ogni punto del campo rispetto a ciascuna delle variabili separatamente, cioè dotate di derivate parziali ciascuna continua rispetto alla variabile di derivazione. Vedremo in seguito che l'ipotesi della continuità è superflua.

FORMULA DI CAUCHY: la funzione w sia analitica in un campo A, risultante, al solito, come prodotto dei due campi, A_1 del piano di z_1 e A_2 del piano z_2. Sia ancora (ξ_1, ξ_2) un punto di A e con c_1 e c_2 indichiamo due cerchi di centri rispettivamente in ξ_1 e ξ_2 e totalmente interni rispettivamente ad A_1 e A_2 di modo che la w è analitica nel bicilindro prodotto di c_1 e c_2. Indicheremo con c_1 e c_2 anche le due circonferenze dei cerchi. Alla funzione w si può applicare la formula di Cauchy relativa a z_1. Sia:

$$f(\xi_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{f(z_1, z_2)}{z_1 - \xi_1} dz_1. \tag{2}$$

Si ottiene in tal modo una funzione palesemente analitica della sola z_2 alla quale pertanto è ancora applicabile la formula di Cauchy

$$f(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{f(\xi_1, z_2)}{z_2 - \xi_2} dz_2$$

la quale tenendo conto della (2) diventa la seguente:

$$f(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{c_2} \frac{dz_2}{z_2 - \xi_2} \int_{c_1} \frac{f(z_1, z_2)}{z_1 - \xi_1} dz_1 \tag{3}$$

che può anche scriversi:

$$f(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{c_1} \int_{c_2} \frac{f(z_1, z_2) dz_1 \, dz_2}{(z_1 - \xi_1)(z_2 - \xi_2)}. \tag{4}$$

È questa la formula di Cauchy per le funzioni di due variabili complesse. L'estensione a più variabili è immediata. Si noti bene che l'integrale doppio al secondo membro della formula (4) ha soltanto il senso che gli deriva dalla (3); esso cioè viene formalmente definito con due integrazioni semplici successive. Le due circonferenze c_1 e c_2 possono essere sostituite da due qualsiasi curve chiuse, purchè naturalmente detti c_1 e c_2 i domini dei quali essi sono le frontiere, risulti totalmente interno ad A il bicilindro prodotto di c_1 e c_2. La (4) continua a sussistere ancora se ai due cerchi si sostituiscano due corone circolari oppure un cerchio ed una corona circolare, purchè il bicilindro prodotto dei due domini limitati piani sia tutto interno al campo A, e con l'avvertenza che al posto di ciascuna circonferenza o di una sola, vanno sostituite le due circonferenze che limitano la relativa corona, tenendo naturalmente conto che, per l'integrazione, la circonferenza interna della corona va percorsa nel verso opposto di quella esterna. Più in generale a ciascuna delle due curve c_1 e c_2 si possono sostituire più curve chiuse in modo che una comprenda le altre, le quali poi siano due di loro una esterna all'altra ed in modo che esse formino la frontiera di un dominio connesso interno al campo di analiticità della funzione. La (4) continua sempre a sussistere tenuto conto che per l'integrazione il verso su ciascuna delle curve interne è opposto al verso sulla curva esterna.

TEOREMA DI GOURSAT: data l'analiticità della funzione w e quindi la continuità della funzione e delle derivate parziali è lecito nella (4) la derivazione sotto il segno di integrale.

Si possono allora trarne dalla (4) tutte le conseguenze che per le funzioni di una variabile si traggono dalla formula di Cauchy. In particolare se ne trae il teorema di GOURSAT relativo all'esistenza ed all'analiticità delle derivate di qualsiasi ordine. Si deduce facilmente la formula:

$$\frac{\partial^{r+s} f(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1^r \partial \xi_2^s} = \frac{r!s!}{(2\pi i)^2} \int_{c_1} \int_{c_2} \frac{f(z_1, z_2)}{(z_1 - \xi_1)^r (z_2 - \xi_2)^s} dz_1 \, dz_2. \tag{5}$$

Anche qui, è inutile fermarsi sulla estensione alle funzioni di più di due variabili la quale è immediata. Dall'analiticità delle derivate della funzione complessa $f(z_1, z_2, ...z_n)$ segue evidentemente l'esistenza delle derivate di ogni ordine delle due funzioni di variabili reali, u e v, parte reale e coefficiente dell'immaginario della funzione $f(z_1, z_2, ...z_n)$.

SERIE DI TAYLOR E DI LAURENT: ragionando in modo del tutto analogo a quanto si fa per le funzioni di una variabile si deduce che, internamente ad un bicilindro circolare di centro nel punto (z_1', z_2') e tutto interno al campo di analiticità la funzione $f(z_1, z_2)$ è sviluppabile in una serie doppia di potenze di punto iniziale (z_1', z_2')

$$f(z_1, z_2) = \sum_{r+s=n}^{0...\infty} \frac{1}{r!s!} \frac{\partial^n f(z_1' z_2')}{\partial^r z_1' \partial^s z_2'} (z_1 - z_1')^r (z_2 - z_2')^s.$$

Riservandoci di trattenerci più avanti sulla convergenza di una serie doppia, occorre però avvertire almeno che per convergenza di una serie doppia di potenze

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} (z_1 - z_1')^n (z_2 - z_2')^m$$

intendiamo la convergenza assoluta, nel senso che una tale serie è almeno convergente se convergente la serie dei moduli dei suoi termini. Per semplicità da questo momento in poi parlando di serie doppia supporremo sempre che il punto iniziale sia l'origine, cio chè, come è superfluo avvertire, non rappresenta restrizione di sorta. Partendo dalla formula di Cauchy relativa a due corone circolari si ottiene facilmente uno sviluppo in serie analogo a quello di LAURENT per le funzioni di una variabile, uno sviluppo cioè del tipo:

$\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} a_{nm} z_1^n z_2^m$ con

$$a_{nm} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{c_1} \int_{c_2} \frac{f(z_1, z_2)}{z_1^{n+1} z_2^{m+1}} dz_1 \, dz_2$$

dove c_1 è una circonferenza interna alla corona circolare del piano di z_2 potendo c_1 e c_2 essere anche le due circonferenze esterne delle corone. Può accadere che la funzione sia analitica in un cerchio relativamente ad una variabile ed in una corona relativamente all'altra variabile. Partendo allora dalla formula di Cauchy si ottiene una serie di LAURENT relativamente ad una variabile, serie che ha i termini funzioni analitiche dell'altra variabile sviluppabili in serie di Taylor. In definitiva si otterrà una serie doppia che contiene le sole potenze positive di una variabile, mentre dell'altra variabile contiene le potenze positive e le negative.

TEOREMA DI LIOUVILLE: per le funzioni di una variabile sussiste il seguente teorema di Liouville: "una funzione analitica in tutti i punti del piano e limitata in modulo è costante" tale teorema, per le funzioni di più variabili è un caso particolare di un teorema più generale che dice: "una funzione analitica esternamente ad una regione ed ivi superiormente in modulo limitata, è costante". Sia $f(z_1, z_2)$ analitica esternamente ad una regione dello spazio a quattro dimensioni. Esisterà allora un numero positivo M tale che la funzione è analitica esternamente alla regione definita dalla limitazione:

$$|z_1| + |z_2| > M. \tag{6}$$

Sia ancora $f(z_1, z_2)$ limitata in modulo in tale regione; esista cioè un numero N positivo tale che per z_1 e z_2 soddisfacenti alla (6) risulti: $|f(z_1, z_2)| < N$.

Posto: $|z_2| > M$ la funzione $f(z_1, z_2)$ risulta analitica qualunque sia z_1 e in modulo limitata. Se la si considera come funzione della sola z_2 essa risulta sviluppabile in una serie di Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z_2^n$$

nella quale i coefficienti sono tutti funzioni di z_1 analitiche in tutto il piano e limitate in modulo, perciò tutte costanti. Ma lo stesso si può dire relativamente a z_2, poichè la (6) è simmetrica rispetto a z_1 e z_2. Dunque la funzione è costante rispetto ad ambedue le variabili.

FUNZIONI ARMONICHE: dalle condizioni di olomorfia delle funzioni di una sola variabile si deduce per derivazione che: "la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di una funzione olomorfa sono funzioni armoniche coniugate". Esaminiamo le (1) e vediamo quali conseguenze per le funzioni di due variabili se ne possono trarre. Derivando la prima delle (1) rispetto ad x_1 e la seconda rispetto ad y_1 indi sommando, e derivando la terza rispetto ad x_2 e la quarta rispetto ad y_2 e sommando si ottengono le relazioni:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = 0$$

analoghe relazioni si ottengono per la v. Dunque: "le due funzioni u e v parte reale e coefficiente dell'immaginario di una funzione analitica sono funzioni armoniche rispetto a ciascuna coppia di variabili x_1 y_1 e x_2 y_2, anzi sono funzioni armoniche coniugate perchè soddisfano alle (1)". Derivando ancora la prima delle (1) rispetto ad x_2 e la quarta rispetto ad y_1 indi sommando e analogamente derivando la prima rispetto ad y_2 e la terza rispetto ad y_1 indi sottraendo si ottengono le altre due relazioni seguenti:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial y_1} = 0.$$

Le stesse relazioni si ottengono facilmente per v. Una funzione delle quattro variabili x_1 y_1 x_2 y_2 che, oltre le precedenti condizioni di armonicità rispetto a ciascuna delle coppie x_1 y_1 e x_2 y_2 soddisfa ancora alle ultime relazioni vien detta "**biarmonica**" (da alcuni anche "iperarmonica"). Dunque: "la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di una funzione analitica di due variabili complesse sono funzioni biarmoniche coniugate" nel caso generale delle funzioni di n variabili complesse:

$$w = f(z_1, z_2, ..., z_n) = u(x_1 y_1 .....x_n y_n) + iv(x_1 y_1 .....x_n y_n)$$

le relazioni di Cauchy risultano in numero di $2n$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y_k} \qquad \frac{\partial u}{\partial y_k} = -\frac{\partial v}{\partial y_k}. \tag{7}$$

Operando una derivazione su queste relazioni come si è fatto nelle (1) si ottengono le relazioni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_h \partial y_k} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial y_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial y_h} = 0$$

e quelle omologhe per v. Si noti che il secondo gruppo di queste relazioni per $k = h$ da luogo ad n identità. Tenuto conto di ciò si vede subito che le relazioni sono in numero di n^2.[1′] Esse sono caratteristiche della parte reale e del coefficiente dell'immaginario delle funzioni analitiche, nel senso che non soltanto la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di una funzione analitica sono funzioni biarmoniche coniugate, ma ancora, due funzioni biarmoniche coniugate sono sempre la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di una funzione analitica. Anzi si può affermare di più ed infatti se si ha una funzione $u(x_1, y_1, x_2, y_2)$ biarmonica in un campo connesso, la forma differenziale:

$$-\frac{\partial u}{\partial y_1}dx_1 - \frac{\partial u}{\partial y_2}dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_1}dy_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dy_2$$

risulta localmente un differenziale esatto e l'integrale curvilineo esteso ad una qualsiasi curva dell'S_4, congiungente un punto fisso $(x'_1\ y'_1\ x'_2\ y'_2)$ col punto $(x_1\ y_1\ x_2\ y_2)$ variabile in un intorno del punto fisso, intorno che si potrà sempre supporre rettilineo, è una funzione biarmonica e coniugata con u. Dunque: "Assegnata una funzione biarmonica in un campo dello spazio a quattro dimensioni, esiste, almeno localmente definita e determinata a meno di una costante, un'altra funzione biarmonica e coniugata alla prima". Di modo che: "esistono infinite funzioni analitiche di due variabili che hanno come parte reale (come coefficiente dell'immaginario) una assegnata funzione biarmonica. Tali funzioni analitiche differiscono tra di loro per una costante immaginaria (per una costante reale)".

TEOREMA DI WEIERSTRASS: Anche per le funzioni di più variabili complesse sussiste il teorema di WEIERSTRASS sulle successioni di funzioni analitiche. "Se una

[1′] Difatti potendo gl'indici h e k assumere indipendentemente l'uno dall'altro tutti i valori interi da 1 ad n, ogni gruppo contiene tante relazioni quante sono le combinazioni con ripetizioni di n elementi a 2 a 2, cioè $\frac{1}{2}n(n+1)$. I due gruppi contengono allora $n(n+1)$ relazioni. Sottraendo le n identità contenute nel secondo gruppo si hanno n^2 relazioni non identiche.

successione di funzioni analitiche converge uniformemente la funzione limite è anch'essa analitica". La dimostrazione del tutto analoga a quella che si fa per le successioni di funzioni di una sola variabile. Sia

$$f_1(z_1, z_2),\ f_2(z_1, z_2), \ldots.., f_n(z_1, z_2)\ldots..$$

una successione di funzioni, tutte analitiche in un campo A ivi uniformemente convergenti alla funzione $f(z_1, z_2)$. Per ciascuna funzione della successione sussiste la formula di Cauchy

$$f_n(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{c_1} \int_{c_2} \frac{f_n(z_1, z_2)}{(z_1 - \xi_1)(z_2 - \xi_2)} dz_1\, dz_2$$

qualunque sia il punto (ξ_1, ξ_2) di A. Data l'uniforme convergenza è lecito il passaggio al limite sotto il segno d'integrale. Si ha allora qualunque sia il punto (ξ_1, ξ_2) di A

$$f(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{c_1} \int_{c_2} \frac{f(z_1, z_2)}{(z_1 - \xi_1)(z_2 - \xi_2)} dz_1\, dz_2$$

ciò che ci assicura l'analiticità della funzione limite in A. Da questo teorema segue: "Una serie di funzioni analitiche uniformemente convergente (in particolare una serie di potenze) ha per somma una funzione analitica nel suo campo di convergenza". L'estensione alle funzioni di più variabili non presenta difficoltà.

FUNZIONI ANALITICHE NEL CAMPO REALE: Ricordiamo che se una funzione $f(x)$ di una variabile reale è analitica, cioè localmente sviluppabile in serie di potenze:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

essa è ancora prolungabile nel campo complesso giacchè se la serie precedente converge per $|x| < r$, la serie complessa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

converge nel cerchio di raggio r. La serie complessa prolunga la funzione nel campo complesso. Possiamo dire lo stesso per le funzioni di più variabili. Sia

$$f(x, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} x^n \, y^m$$

una funzione sviluppabile in serie di Taylor. Se la serie è convergente per $|x| < r$, $|y| < r$, la serie doppia complessa

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} z_1^n \, z_2^m$$

risulta anch'essa uniformemente convergente nel policilindro prodotto dei due cerchi di centro nell'origine e raggio r, uno nel piano z_1, l'altro nel piano z_2. Tale serie prolunga la funzione nel campo complesso. L'estensione alle funzioni di più variabili è semplice, di modo che: "ogni funzione di più variabili reali localmente sviluppabili in serie di potenze è prolungabile nel campo complesso". Per tale ragione una funzione di più variabili reali sviluppabile in serie di potenze si dice "**funzione analitica**". È opportuno ancora ricavare il seguente teorema, noto dall'analisi delle funzioni di variabili reali: "Se una funzione è sviluppabile in serie di potenze, tale serie non può essere che la serie di Taylor". Questo teorema si enuncia più concisamente nei seguenti termini: "**Lo sviluppo in serie di potenze è unico**". Sia:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

una funzione di una variabile complessa olomorfa nell'intorno di un punto, che al solito, identificheremo con l'origine.

Essa risulta sviluppabile in serie di Taylor in un certo cerchio c, di centro nell'origine e del quale diremo r il raggio

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n)(x + iy)^n. \qquad (8)$$

Tale serie converge assolutamente nel cerchio c, cioè converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n + i\beta_n| \cdot |x + iy| \quad \text{per} \quad |x + iy| < r.$$

Risulta allora convergente anche la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n + i\beta_n| \, (|x| + |y|)^n \;\text{ per }\; |x| + |y| < r$$

questa serie perciò converge nel quadrato Q interno al cerchio c ed avente i vertici nei punti d'intersezione del cerchio con gli assi. Avendosi inoltre

$$\frac{|\alpha_n| + |\beta_n|}{\sqrt{2}} < |\alpha_n + i\beta_n|$$

converge in Q anche la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_n| + |\beta_n|}{\sqrt{2}} \Big(|x| + |y|\Big)^n .$$

Potendosi prescindere dal fattore $\frac{1}{\sqrt{2}}$ che moltiplica tutti i termini della serie risulta in Q convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(|\alpha_n| + |\beta_n|\Big) \Big(|x| + |y|\Big)^n .$$

Orbene i termini di questa serie non sono altro che i moduli dei corrispondenti termini della (8) quando però sviluppate tutte le potenze $(x + iy)^n$, si siano eseguiti anche tutti i prodotti $(\alpha_n + i\beta_n)(x + iy)^n$; cioè quando la (8) si considera come una serie in x ed in y, la quale perciò risulta assolutamente ed uniformemente convergente nel quadrato Q. Essa rimane pertanto convergente quando si muta in un modo qualsiasi l'ordine dei termini.

Si possono allora separare i termini che non contengono a fattore l'unità immaginaria da quelli che la contengono. La serie in tal modo si scompone nella somma di due serie in x ed y, delle quali una è moltiplicata per l'unità immaginaria. Dovendo essere sempre uniformemente convergente, tali debbono risultare ambedue le serie. D'altra parte queste due serie non sono altro che serie di potenze in x ed y.[1'] Si ha dunque nel quadrato Q:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} p_{m,n} x^m y^n + i \sum_{m,n=0}^{\infty} q_{m,n} x^m y^n$$

e quindi

$$u(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} p_{m,n} x^m y^n \qquad v(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} q_{m,n} x^m y^n.$$

La parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di una funzione olomorfa risultano sviluppabili in serie di potenze, che per la unicità dello sviluppo in serie, sono le relative serie di Taylor cioè le due funzioni sono entrambe funzioni analitiche di due variabili reali e perciò prolungabili nel campo complesso.

L'estensione di questo risultato alle funzioni di più variabili si fa ripetendo lo stesso procedimento. Vi accenniamo appena limitandoci al caso di due variabili. Sia:

$$f(z_1, z_2) = u(x_1, y_1, x_2, y_2) + iv(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

una funzione analitica nell'intorno della origine $(0,0)$, perciò sviluppabile in una serie doppia:

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{nm} z_1^m z_2^n$$

convergente nel campo costituito dai punti interni al bicilindro circolare prodotto di due cerchi c_1, c_2, che possiamo anche porre dello stesso raggio, che diremo r. Posto

$$a_{mn} = \alpha_{mn} + i\beta_{mn}$$

essendo convergente la serie

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} |a_{mn}||z_1|^m |z_2|^n \text{ per } |z_1| < r \text{ e } |z_2| < r$$

[1'] Difatti l'espressione $(x+iy)^n$ è un polinomio omogeneo di grado n in x ed y; perciò il prodotto $(\alpha_n + i\beta_n)(x+iy)^n$, quando si dice separato il reale dall'immaginario, da luogo a due polinomi in x ed y.

la serie seguente

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\Big(|\alpha_{mn}|+|\beta_{mn}|\Big)\Big(|x_1|+|y_1|\Big)^m\Big(|x_2|+|y_2|\Big)^n$$

risulta convergente per

$$|x_1|+|y_1|<r \qquad |x_2|+|y_2|<r$$

cioè nel campo interno al bicilindro, non più circolare, ma prodotto dei quadrati Q_1 Q_2 interni rispettivamente a c_1 e c_2 ed aventi i vertici nei punti di incontro dei cerchi con gli assi. I termini della serie ultima sono i moduli dei termini della serie

$$\sum_{m,n}^{\infty}(\alpha_{mn}+i\beta_{mn})(x_1+iy_1)^m(x_2+iy_2)^n$$

qualora in ogni termine si siano effettuate le potenze ed eseguito il prodotto. Come si vede ora non c'è altro da fare che ricalcare il ragionamento precedente per concludere: "La parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di una funzione analitica sono funzioni analitiche e perciò prolungabili nel campo complesso". Se con $(x_1....x_n)$ indichiamo le coordinate correnti in uno spazio ad n dimensioni reali e

$$\varphi_i(t_1,t_2,....,t_r) \qquad (i=1,2,....,n)$$

sono n funzioni di r variabili reali definite tutte in un insieme A dell'S_n le equazioni

$$x_i=\varphi_i(t_1,t_2,....,t_r) \qquad (i=1,2,....,n)$$

rappresentano una varietà ad r dimensioni dell'S_n, varietà regolare se le funzioni φ_i soddisfano alle condizioni:

a) :- sono continue e dotate di derivate parziali prime in A

b) :- la matrice iacobiana $\frac{\partial(\varphi_1...\varphi_n)}{\partial(t_1...t_r)}$ contiene almeno un minore di ordine massimo non nullo in A. La varietà è localmente regolare se, non essendo verificata in tutto A la condizione b) esiste però, per ogni punto di A un minore di ordine massimo della matrice iacobiana diverso da 0 nel punto stesso. Se le funzioni φ_i sono localmente, cioè nell'intorno di ogni punto di A, sviluppabili in serie di potenze, la varietà è una "varietà analitica". Si parla così di curve analitiche, di superficie analitiche, ecc.. Le curve analitiche sono le varietà ad una dimensione, definite da un'equazione del tipo:

$$x_i = \varphi_i(t) \ \ (i = 1, 2, ..., n)$$

con φ_i funzioni analitiche della variabile reale t, cioè delle funzioni localmente sviluppabili in serie di potenze.

NUOVA FORMA DELLE CONDIZIONI DI ANALITICITÀ: il risultato ottenuto nel paragrafo precedente ci permette di dare una nuova forma, dovuta al Poincaré, alla condizione di analiticità. Indicando al solito con $\bar{a}$ il coniugato del numero complesso a, si vede subito che:

$$x_k = \frac{1}{2}(z_k + \bar{z}_k); \ \ y_k = (+i2)^{-1}(z_k - \bar{z}_k).$$

Dal fatto che due funzioni $u(x_1y_1...x_ny_n)$ $v(x_1y_1...x_ny_n)$ parte reale e coefficiente dell'immaginario di una funzione analitica $f(z_1..z_n)$ sono funzioni analitiche e perciò prolungabili nel campo complesso, ne segue che, per le (9), possiamo considerare queste due funzioni come funzioni delle $2n$ variabili $z_1...z_n$, $\bar{z}_1....\bar{z}_n$. Dopo di che si vede subito che le condizioni di Cauchy si possono scrivere:[(1')]

[[(1')] Tenendo presente le (9) e le (7) si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial z_k} = \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial z_k} + \frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y_k}\right).$$

Inoltre:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \bar{z}_h} = \frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{\partial u}{\partial z_k}\right)\frac{\partial x_h}{\partial \bar{z}_h} + \frac{\partial}{\partial y_h}\left(\frac{\partial u}{\partial z_k}\right)\frac{\partial y_h}{\partial \bar{z}_h} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{\partial u}{\partial z_k}\right) - \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial y_h}\left(\frac{\partial u}{\partial z_k}\right)$$

per le ( ):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \bar{z}_h} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_h} + \frac{1}{i}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial x_h}\right) - \frac{1}{4i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial y_h} + \frac{1}{i}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_h}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_h} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_h}\right) + \frac{1}{4i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial x_h} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial y_h}\right)$$

donde si vede che le (10) equivalgono alle (7).]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \bar{z}_h} = 0. \tag{10}$$

Esse dunque si presentano sotto forma di equazioni iperboliche. Sono evidentemente in numero di n^2, giacchè sono tante quante le disposizioni con ripetizione di n elementi a due a due.

CAMPO RISTRETTO E CAMPO TOTALE DI CONVERGENZA DI UNA SERIE DI POTENZE: avvertiamo ancora una volta che per semplicità ci riferiamo sempre a serie di punto iniziale nell'origine. Si è convenuto di dire convergente una serie multipla di potenze se tale è la serie dei moduli dei suoi termini, se cioè essa converge assolutamente, e quindi anche incondizionatamente. Si vede subito allora che se la serie doppia:

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} z_1^n z_2^m \tag{11}$$

converge nel punto (ξ_1, ξ_2) converge ancora in ogni altro punto (z_1, z_2) tale che sia: $|z_1| < |\xi_1|$; $|z_2| < |\xi_2|$. D'altra parte se la serie converge per $|z_1| \leq |\rho_1|, |z_2| \leq |\rho_2|$ convergerà ancora per z_1 e z_2 entrambi in modulo minori del più piccolo dei due numeri ρ_1 e ρ_2. Consideriamo allora l'insieme dei numeri non negativi ρ tali che la serie converge per $|z_1| \leq \rho$, $|z_2| \leq \rho$ e diciamo r l'estremo superiore di questo insieme. La serie convergerà per $|z_1| < r$; $|z_2| < r$ e non convergerà per z_1 e z_2 entrambi in modulo maggiori di r, nulla potendosi in generale affermare quando z_1 o z_2 oppure entrambi sono in modulo uguali ad r. In altri termini la serie converge in ogni punto interno al bicilindro determinato dalle limitazioni $|z_1| \leq r$, $|z_2| \leq r$. Tali punti costituiscono un campo che prende il nome di "campo ristretto" di convergenza della serie. Il numero r a sua volta si chiama "raggio ristretto" di convergenza. Non è escluso che sia $r = \infty$ oppure $r = 0$. Nel primo caso la serie convergente in ogni punto dell'S_4 nel secondo il campo ristretto si riduce alla sola origine. Dal modo stesso di definire il raggio ristretto appare chiaro che la serie può convergere quando una delle due variabili è maggiore in modulo di r e l'altra minore. L'insieme di tutti i punti dell'S_4 nei quali la serie converge è in generale più ampio del campo ristretto. Detto allora A l'insieme di tutti i punti dell'S_4 nei quali la serie converge, l'insieme dei punti interni ad A costituisce il campo totale di convergenza della serie. L'estensione delle precedenti definizioni alle serie multiple, cioè a più di due variabili, si presenta come immediata, basta estendere all'S_n le precedenti considerazioni fatte sull'S_4.

PROLUNGAMENTO ANALITICO: il prolungamento analitico per le funzioni di più variabili si può operare allo stesso modo che per le funzioni di una sola variabile. Diremo che una serie di potenze, dotata di un effettivo campo di convergenza,[1′] costituisce un elemento analitico di una funzione analitica. Per ottenere il prolungamento analitico basta operare su un elemento con lo stesso metodo adoperato per le funzioni di una variabile. Si possono anche dedurre tutte le conseguenze tratte allora, come quelle relative alla monodromia e polidromia delle funzioni analitiche. Si può anche parlare di prolungamento lungo una curva. All'uopo si tenga conto della definizione precedentemente data di curva e di curva analitica. Si noti che, nell'operare il prolungamento analitico di un elemento è perfettamente indifferente considerare come campo di convergenza il ristretto oppure il totale, giacchè è evidente che, partendo dal ristretto, si riesce ad invadere, per prolungamenti analitici mediante campi ristretti, il campo totale. È stato affermato che il caso generale non è quello delle funzioni prolungabili, bensì quello delle funzioni non prolungabili oltre il loro campo totale di convergenze.

SULLE SERIE DOPPIE: faremo ora una lunga digressione sulle serie doppie allo scopo di studiare il campo di convergenza. Data una serie doppia:

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} z_1^m z_2^n$$

[1′] Come si è detto il campo ristretto può venire a mancare, ma la serie può essere priva anche di effettivo campo totale di convergenza, nel qual caso l'insieme dei punti nei quali la serie converge è privo di punti interni. Ciò avviene quando la serie converge solo per valori nulli di almeno una variabile.

abbiamo già definito ciò che deve intendersi per campo ristretto e ciò che è il campo totale di convergenza. Vogliamo ora meglio caratterizzare questo secondo campo. Dato un numero $r_1 > 0$, consideriamo l'insieme dei numeri positivi ρ, tale che la serie converga per $|z_1| < r_1,\ |z_2| < \rho$. Se tal'insieme non è vuoto diciamo r_2 l'estremo superiore di tale insieme. In altri termini, ad ogni numero reale positivo r_1 associamo, se esiste, quel valore r_2, pure positivo, tale che la serie (12) converge per $|z_1| < r_1\ |z_2| < r_2$ e diverge per $|z_1| > r_1,\ |z_2| > r_2$. I due numeri si chiamano "raggi associati di convergenza". Il raggio ristretto non è altro che il raggio associato a se stesso. Ad ogni valore di r_1 preso entro certi limiti, corrisponde un valore per r_2. Abbiamo detto preso entro certi limiti, giacchè può ad un valore di r_1 maggiore di zero non corrispondere alcun valore per r_2. Anzi può accadere che non esiste alcun valore di r_1 maggiore di zero al quale ne corrisponda uno di r_2 maggiore di zero in modo che r_1 ed r_2 siano raggi associati, nel qual caso la serie converge soltanto per $z_1 = 0$. Analogamente si dica scambiando r_2 con r_1, addirittura può accadere che la serie converge soltanto per $r_1 = r_2 = 0$. In tutti i modi consideriamo gli insiemi nei quali variano r_1 ed r_2 e diciamone R_1 ed R_2 rispettivamente gli estremi superiori, ciascuno dei quali potendo risultare anche infinito. È evidente che quando r_1 descrive l'intervallo $(0, R_1)$ crescendo, r_2 descrive decrescendo l'intervallo $(0, R_2)$, risultando così funzione decrescente di $r_1 :\ r_2 = \varphi(r_1)$. Il raggio ristretto è quel valore r per il quale è $r = \varphi(r)$. Dopo ciò risulta chiaro che, se un punto (z_1, z_2) appartiene al campo totale di convergenza, esistono due raggi associati r_1 ed r_2 tali che si ha: $|z_1| < r_1,\ |z_2| < r_2$. Si vede facilmente che l'insieme dei punti di convergenza della (12) non è un campo, ma un insieme privo di punti interni, soltanto nel caso, già messo in rilievo, che uno almeno dei due insiemi descritti da r_1 ed r_2 è vuoto. Intendiamo escludere queste eventualità dalle nostre considerazioni, perciò supporremo che la serie sia dotata di un effettivo campo di convergenza. Il raggio ristretto di convergenza è determinato per il teorema di Cauchy-Hadamard, dalla relazione:$^{(1')}$

[$^{(1')}$ Il teorema di Cauchy-Hadamard afferma che il raggio di convergenza di una serie semplice $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è definito dalla relazione:

$$\overset{\prime\prime}{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r}.$$

Da questa relazione si deduce immediatamente la (13) qualora si rifletta che determinare il raggio ristretto di convergenza della serie doppia (12) equivale a determinare il raggio di convergenza della serie semplice

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} z^{m+n}$$

ottenuta dalla (12) ponendo $z_1 = z_2 = z$.]

$$\lim_{m,n\to\infty}'' \sqrt[n+m]{|a_{nm}|} = \frac{1}{r}$$

dove il simbolo del primo membro designa il massimo limite o estremo superiore di indeterminazione. La relazione vale qualunque sia tale massimo limite con la convenzione che se esso è infinito, $r = 0$, cioè il campo ristretto viene a mancare, mentre se il massimo limite è 0 (zero) è $r = \infty$, cioè la serie è convergente comunque si prendano z_1 e z_2. Per i raggi associati di convergenza sussiste la relazione:[1']

[[1'] La relazione si deduce facilmente dalle proprietà caratteristiche del massimo limite. Poniamo:

$$\lim_{m,n\to\infty}'' \sqrt[m+n]{|a_{mn}| r_1^m r_2^n} = l$$

e facciamo vedere che non può essere nè $l > 1$, nè $l < 1$,

a) se fosse $l > 1$, per qualsiasi numero positivo $\varepsilon < l - 1$ sarebbe ancora $l > 1 + \varepsilon$. Ciò importa per la proprietà del massimo limite, che comunque si prende un intero positivo ν esistono sempre indici, m ed n, ambedue maggiori di ν, per i quali è

$$\sqrt[m+n]{|a_{mn}| r_1^m r_2^n} > 1 + \varepsilon$$

cioè $|a_{mn}| r_1^m r_2^n > (1+\varepsilon)^{m+n}$. Si prende allora un punto (z_1, z_2) per il quale è

$$|z_1| = r_1[1+\varepsilon]^{-\frac{1}{2}} < r_1, \ |z_2| = r_2[1+\varepsilon]^{-\frac{1}{2}} < r_2$$

in tal punto la serie converge. D'altra parte risulta:

$$|a_{mn}| \cdot |z_1|^m \cdot |z_2|^n = |a_{mn}| r_1^m r_2^n (1+\varepsilon)^{-\frac{m+n}{2}}$$

e pertanto, stante la formula precedente, comunque si fissa un intero $\nu > 0$ esistono coppie m, n ambedue maggiori di ν, per cui è:

$$|a_{mn}|\ |z_1|^m\ |z_2|^n > (1+\varepsilon)^{\frac{m+n}{2}}$$

risultato questo che contraddice alla convergenza della serie.

b) supposto ora $l < 1$, per qualunque numero positivo $\varepsilon < l - 1$, risulta $l < 1 - \varepsilon$. Per la proprietà caratteristica del massimo limite, la quantità $\sqrt[m+n]{|a_{mn}| r_1^m r_2^n}$ risulta definitivamente minore di $1 - \varepsilon$. Cioè esiste un intero positivo ν tale che, per ogni coppia di indici m, n, ambedue maggiori di ν si ha: $\sqrt[m+n]{|a_{mn}| r_1^m r_2^n} < 1 - \varepsilon$ ossia:

$$r_1^m r_2^n |a_{mn}| < (1-\varepsilon)^{m+n}.$$

Sia (z_1, z_2) un qualunque punto per il quale è:

$$|z_1| = \frac{r_1}{\sqrt{1-\varepsilon}} > r_1;\ |z_2| = \frac{r_2}{\sqrt{1-\varepsilon}} > r_2$$

punto nel quale la serie non converge. Si ha però

$$|a_{mn}|\ |z_1|^m\ |z_2|^n = |a_{mn}| r_1^m r_2^n (1-\varepsilon)^{-\frac{m+n}{2}}$$

e quindi per m ed n ambedue maggiori di ν

$$|a_{mn}|\ |z_1|^m\ |z_2|^n < (1-\varepsilon)^{\frac{m+n}{2}}$$

relazione questa che importerebbe la convergenza della serie nel punto (z_1, z_2).]

$$\overset{\prime\prime}{\lim_{m,n\to\infty}} \sqrt[m+n]{|a_{mn}| r_1^m r_2^n} = 1.$$

la quale per $r_1 = r_2 = r$ si riduce alla (13). Posto $t_1 = \log\ r_1$ e $t_2 = \log\ r_2$ si ha

$$-\infty < t_1 < \log\ R_1 \ \text{ per } \ 0 < r_1 < R_1$$

$$-\infty < t_2 < \log\ R_2 \ \text{ per } \ 0 < r_2 < R_2$$

ad ogni valore di t_1 corrisponde un valore di t_2, in modo che a due valori di t_1 : t_1' e t_1'', con $t_1' < t_2''$ corrispondono due valori di t_2 : t_2' e t_2'' con $t_2' \geq t_2''$. Poniamo ancora:

$$\sigma = (m+n)^{-1} \log |a_{mn}| + m(m+n)^{-1} t_1 + n(m+n)^{-1} t_2. \tag{15}$$

La (14) importa: $\lim'' \ \sigma = 0$. Da questa relazione per la proprietà caratteristica del massimo limite, si deduce che, qualunque sia la coppia t_1, t_2 e comunque si fissi $\varepsilon > 0$ si ha sempre $\sigma < \varepsilon$, ed inoltre esistono infinite coppie di indici m ed n per le quali è anche $|\sigma| < \varepsilon$. Consideriamo i tre valori di t_1 : $t_1 < t_1' < t_1''$ i corrispondenti tre valori di t_2 : $t_2 \geq t_2' \geq t_2''$ ed i valori di σ corrispondenti a ciascuna coppia:

$$(m+n)^{-1} \log |a_{mn}| + m(m+n)^{-1} t_1 + n(m+n)^{-1} t_2 = \sigma$$

$$(m+n)^{-1} \log |a_{mn}| + m(m+n)^{-1} t_1' + n(m+n)^{-1} t_2' = \sigma'$$

$$(m+n)^{-1} \log |a_{mn}| + m(m+n)^{-1} t_1'' + n(m+n)^{-1} t_2'' = \sigma''.$$

Consideriamo queste tre relazioni come tre equazioni lineari nelle tre incognite:

$$(m+n)^{-1} \log |a_{mn}| \ \ , \ \ (m+n)^{-1} m \ \ , \ \ (m+n)^{-1} n$$

esaminiamo i due determinanti:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & \sigma \\ 1 & t_1' & \sigma' \\ 1 & t_1'' & \sigma'' \end{vmatrix} = \sigma(t_1'' - t_1) + \sigma'(t_1 - t_1'') + \sigma''(t_1' - t_1)$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & \sigma & t_2 \\ 1 & \sigma' & t_2' \\ 1 & \sigma'' & t_2'' \end{vmatrix} = \sigma(t_2' - t_2'') + \sigma'(t_2'' - t_2) + \sigma''(t_2 - t_2').$$

Supponiamo m ed n abbastanza grandi, assegnato comunque $\varepsilon > 0$ è certamente $\sigma < \varepsilon$, $\sigma'' < \varepsilon$. Essendo $t_1'' - t_1 \geq 0$, si ha:

$$\sigma(t_1'' - t_1) + \sigma''(t_1' - t_1) < \varepsilon(t_1'' - t_1).$$

D'altra parte per un'osservazione fatta precedentemente esistono infinite coppie m, n con n ed m opportunamente grandi, tali che è $|\sigma'| < \varepsilon$ e perciò è:

$$A_1 < \varepsilon(t_1'' - t_1) + \varepsilon(t_1'' - t_1) = 2\varepsilon(t_1'' - t_1)$$

dunque A_1 si può rendere in valore relativo minore di un numero positivo arbitrario. Lo stesso si può affermare e dimostrare per A_2. Posto:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_2 \\ 1 & t_1' & t_2' \\ 1 & t_1'' & t_2'' \end{vmatrix}$$

risolvendo con la regola di Cramer (il sistema) si ha:

$$m(m+n)^{-1} = A_1 A^{-1} \qquad n(m+n)^{-1} = A_2 A^{-1}.$$

Se dunque fosse $A_2 > 0$, dovrebbe risultare anche $A_1 > 0$, allora le due quantità $\frac{m}{m+n}$, $\frac{n}{m+n}$ potrebbero rendersi piccole a piacere, ciò che è assurdo perchè la loro somma è l'unità. Dunque deve essere:

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_2 \\ 1 & t_1' & t_2' \\ 1 & t_1'' & t_2'' \end{vmatrix} \leq 0. \tag{16}$$

Questa è una proprietà dei raggi associati: (r_1, r_2) (r_1', r_2') (r_1'', r_2'') tali che $r_1 < r_1' < r_1''$ soddisfano sempre alle relazioni (16), ossia alla seguente:

$$\begin{vmatrix} 1 & \log\, r_1 & \log\, r_2 \\ 1 & \log\, r_1' & \log r_2' \\ 1 & \log\, r_1'' & \log\, r_2'' \end{vmatrix} \leq 0. \tag{17}$$

Vedremo poi che questa proprietà è caratteristica dei raggi associati. Vediamo ora che cosa si può dedurre dalla (16). Essendo r_2 funzione decrescente di r_1, risulta anche t_2 funzione decrescente di t_1 : $t_2 = g(t_1)$. Esaminiamo il diagramma di tale funzione nel piano (t_1, t_2). Se:

$$T \equiv (t_1, g(t_1)), \;\; T' \equiv (t_1', g(t_1')), \;\; T'' \equiv (t_1'', g(t_1''))$$

sono tre punti della curva con $t_1 < t_1' < t_1''$ in virtù della (16) si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & g(t_1) \\ 1 & t_1' & g(t_1') \\ 1 & t_1'' & g(t_1'') \end{vmatrix} \leq 0.$$

Cioè è negativo o nullo il determinante che esprime l'area del triangolo $T\ T'\ T''$. Dunque seguendo la curva da T a T'' l'area del triangolo, quando questo non è degenere, viene percorsa in senso negativo e pertanto la retta discendente $T\ T''$ dividendo il piano in due parti lascia T' nel semipiano superiore. Ciò ci assicura che la curva è convessa verso l'alto. Si tratta allora di una curva decrescente. Si deduce da ciò che la funzione $g(t)$ è continua. Ed infatti, come funzione monotona, non può avere che discontinuità di prima specie. Se t fosse un punto di discontinuità basterebbe prendere due valori $t' < t$ e $t'' > t$ e prossimi a t per vedere che la corda congiungente i due punti di ascissa rispettivamente t' e t'' non lascia la curva tutta dalla stessa parte, ciò che non può sussistere col fatto che la convessità è costantemente verso l'alto. Per esaminare meglio l'andamento della curva dobbiamo distinguere diversi casi:

I) I due numeri R_1 ed R_2 e quindi anche $\log\ R_1$ e $\log\ R_2$ sono finiti.

a) - nè t_1 assume mai valore uguale a $\log\ R_1$ nè t_2 diventa mai uguale a $\log\ R_2$. Si ha allora:

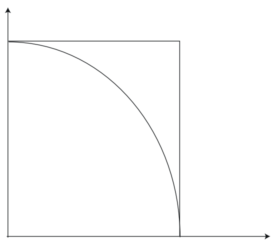
$$\lim_{t_1 \to \log\ R_1} g(t_1) = -\infty \qquad \lim_{t_1 \to \infty} g(t_1) = \log\ R_1.$$

La curva risulta dotata di due asintoti, uno orizzontale nella retta di equazione

$$t_2 = \log\ R_2 \tag{18}$$

l'altro verticale nella retta di equazione:

$$t_1 = \log\ R_1. \tag{19}$$



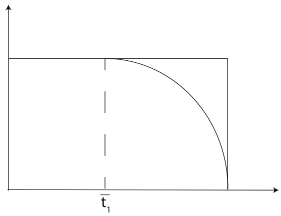
Essa è sempre decrescente con la convessità volta verso l'alto e situata tutta al di sotto dello asintoto orizzontale e tutta a sinistra dello asintoto verticale.

b) - risultando dunque sempre:

$$\lim_{t_1 \to \log\ R_1} g(t_1) = -\infty$$

esiste però un particolare valore di t_1 diciamo $\bar{t}_1$ per cui si ha $R_2 = g(\bar{t}_1)$. In tal caso non potendo t_2 acquistare valori superiori a log R_2 la curva che risulta asintotica alla retta di equazione (19) nel punto di ascissa $\bar{t}_1$ si unisce alla retta di equazione (18).

c) - risulta $\lim_{t_2 \to \infty} t_1 = \log\ R_1$ mentre è finito il valore di t_2 per $t_1 = \log\ R_1$. La curva è decrescente dotata di un asintoto orizzontale nella retta di equazione (18) e si unisce poi alla retta di equazione (19).



d) - infine può accadere che esista un particolare valore di t_1 per cui si ha: $t_1 = \log\ R_1$ nel qual caso la curva è costituita da un tratto decrescente che si unisce alle due rette (18) (19).

II) è infinito uno dei due numeri R_1 o R_2, oppure sono infiniti entrambi.

a) - se è $R_2 = \infty$ e R_1 finito, risulta: $\lim_{t_1 \to \infty} g(t_1) = \infty$, cioè la curva non soltanto non ha l'asintoto orizzontale, ma non è affatto limitata superiormente. Proviene da $+\infty$ decrescendo e poi si comporta come la precedente, ossia o tendendo a $-\infty$ asintoticamente alla retta (19) oppure unendosi in un certo punto con tale retta.

b) - analogamente se è $R_1 = \infty$ e R_2 è finito, si ha $\lim_{t_1 \to \infty} g(t_1) = -\infty$ e la curva non è limitata inferiormente. A sinistra si comporta in uno dei modi detti, cioè o è asintotica alla retta (18) o si unisce con essa, mentre a destra l'ordinata tende a $-\infty$ senza essere limitata da alcuna retta reale.

c) - infine se è $R_1 = R_2 = \infty$ la curva è certamente decrescente senza essere limitata nè da semirette orizzontali nè da semirette verticali. Riassumendo possiamo affermare: "tra i raggi associati di convergenza di una serie doppia di potenze sussiste un legame caratterizzato dalla (17), legame che subordina tra i logaritmi dei raggi una funzione monotona continua, avente per diagramma una curva convessa che può avere o no due asintoti, uno verticale e l'altro orizzontale, e può addirittura essere completata da una o due semirette".

Naturalmente non è affatto detto che la curva sia ovunque dotata di tangente. Come conseguenza della convessità si ha che essa è dotata di retta radente discendente. Da quanto si è detto scaturisce una rappresentazione del campo totale. La curva di equazione: $t_2 = g(t_1)$ completata opportunamente da una o due semirette divide il piano (t_1, t_2) in due parti: verso una la curva volge la convessità, verso l'altra la concavità. La serie doppia:

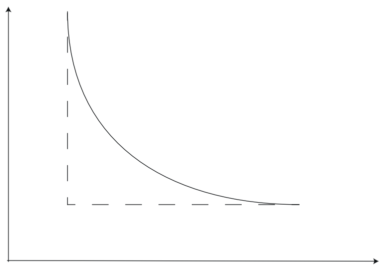
$$\sum_{m,n}^{1\ldots\infty} |a_{mn}|\; r_1^m\; r_2^n$$

converge se i due numeri sono tali che nel piano (t_1, t_2), il punto di coordinate

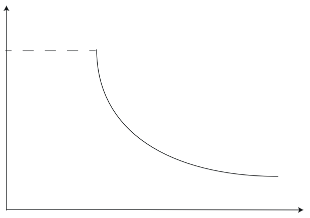
$$(\log\; r_1, \log\; r_2)$$

è situato nella regione verso la quale la curva volge la concavità. Ne segue che nello spazio a quattro dimensioni delle due variabili z_1 e z_2 il campo totale di convergenza della serie doppia (12) è costituito dallo insieme dei punti (z_1, z_2) tali che nel piano (t_1, t_2) i punti: $(\log |z_1|, \log |z_2|)$ sono situati nella regione suddetta. Si ha così una rappresentazione del campo totale nel piano (t_1, t_2). Se si vuole una rappresentazione nel piano dei raggi associati (r_1, r_2) occorre riferirsi al diagramma della funzione $r_2 = \varphi(r_1)$.

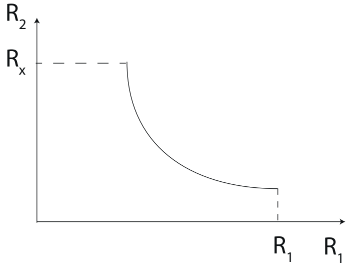
La funzione è decrescente ma non necessariamente convessa o concava. Se è $R_1 = R_2 = \infty$ il diagramma è una curva decrescente che ha due asintoti uno verticale e l'altro orizzontale, asintoti che possono coincidere con gli assi.



Se uno solo dei due estremi R_1 o R_2 è infinito, la curva possiede un solo asintoto. Se infine i due numeri R_1 ed R_2 sono ambedue finiti, il diagramma si riduce ad un tratto di curva decrescente limitato dalle due rette $r_1 = R_1, r_2 = R_2$.



Si ha in tal modo una rappresentazione del campo totale nel piano (r_1, r_2). Infatti il campo totale e l'insieme dei punti (z_1, z_2) dello spazio a quattro dimensioni, tali che nel piano (r_1, r_2) i punti $(|z_1|, |z_2|)$ non formano il campo limitato dagli assi della curva è (nel caso che uno o entrambi i numeri R_1 ed R_2 sono finiti), [limitato *n.d.c.*] da una o ambedue le suddette rette parallele agli assi.



Abbiamo asserito che la (17) è caratteristica dei raggi di convergenza associati. Perchè ciò sia completamente dimostrato occorre far vedere che: "ogni relazione fra due variabili che sia continua convessa nei logaritmi è atta a definire il campo totale di una serie di potenze". Possiamo ora accennare alla dimostrazione di questa proposizione. Cominciamo da un caso particolare. Supponiamo che si tratti di una relazione lineare nei logaritmi. Per quanto abbiamo detto il diagramma della funzione $t_2 = g(t_1)$ nel caso che sia lineare, si può presentare sotto le forme seguenti:

a) - una retta discendente.

b) - una semiretta obbliqua discendente completata da un'altra semiretta orizzontale o verticale.

c) - un segmento di retta obbliqua discendente completato da due semirette una orizzontale e l'altra verticale.

Cominciamo dal sotto-caso a), che corrisponde al fatto che ambedue i raggi hanno come estremo superiore l'infinito. Sia dunque:

$$\alpha t_1 + \beta t_2 + \gamma = 0 \tag{20}$$

l'assegnata relazione lineare tra i logaritmi. Possiamo supporre $\alpha \geq 0$. Dovendosi avere una retta discendente, cioè t_2 funzione decrescente di t_1, deve essere $\beta > 0$. Per ogni intero positivo n diciamo $\alpha^{(n)}$ il numero intero immediatamente seguente αn, $\beta^{(n)}$, il numero intero immediatamente seguente $n\beta$. Si ha dunque:

$$\alpha^{(n)} > \alpha n \qquad \beta^{(n)} > n\beta.$$

Consideriamo la serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{n\gamma}\ z_1^{\alpha^{(n)}}\ z_2^{\beta^{(n)}} \tag{21}$$

per il modulo del termine generale di questa serie si ha:

$$e^{n\gamma}\ |z_1|^{\alpha^{(n)}}\ |z_2|^{\beta^{(n)}} = e^{n\gamma + \alpha^{(n)} \log|z_1| + \beta^{(n)} \log|z_2|}. \tag{22}$$

Ciò posto consideriamo la serie di termini positivi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{n[\gamma + \alpha \log|z_1| + \beta \log|z_2|]} \tag{23}$$

che differisce dalla serie dei moduli della (21) per avere $n\alpha$ ed $n\beta$ al posto rispettivamente di $\alpha^{(n)}$ e $\beta^{(n)}$. Ne risulta evidentemente che i termini della (21) differiscono in modulo dai termini della (23) per un fattore limitato s, pertanto, la convergenza assoluta della (21) discende senz'altro dalla convergenza della (23). Ma questa è una serie geometrica la quale converge soltanto se è verificata la disuguaglianza:

$$\alpha \log|z_1| + \beta \log|z_2| + \gamma < 0.$$

Questa disuguaglianza d'altra parte è verificata soltanto se, il punto di coordinate

$$(\log|z_1|, \log|z_2|)$$

è al di sotto della retta discendente (20). Segue da ciò, tenendo presente quanto abbiamo precedentemente conseguito, che la regione al di sotto di tale retta rappresenta nel piano (t_1, t_2) il campo totale di convergenza della (21) e pertanto la relazione lineare (20) è atta a definire il campo totale di convergenza di una serie di potenze. Tralasciando i sottocasi b) e c) che come apparirà da un'osservazione alla fine non presentano difficoltà, passiamo senz'altro al caso generale. Sia: $t_2 = g(t_1)$ l'assegnata funzione che stabilisce il legame tra t_1 e t_2, legame tale che la curva risulti discendente e connessa, completata o no da due tratti rettilinei nel modo già illustrato. Prendiamo sulla curva una infinità numerabile di punti tali che costituiscano un insieme denso sulla curva[1'].

Consideriamo in ciascuno di tali punti la retta radente o, se esiste, la retta tangente alla curva:

$$\alpha_i t_1 + \beta_i t_2 + \gamma_i = 0.$$

Tale retta è discendente e perciò si trova nelle condizioni della retta (20). Ripetendo per questa retta la costruzione precedente abbiamo la serie:

$$P_i(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n\gamma_i}\, z_1^{\alpha_i^{(n)}}\, z_2^{\beta_i^{(n)}}$$

che converge quando il punto $(\log|z_1|, \log|z_2|)$ trovasi al di sotto della retta. Si ottiene così un'infinità numerabile di serie che, combinate linearmente, danno luogo ad un'altra serie:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i\, P_i(z_1, z_2).$$

La combinazione lineare può farsi in modo che la serie risultante conservi ancora la convergenza; all'uopo basta scegliere c_i in modo che sia convergente la serie $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$, evidentemente la serie risultante converge soltanto per z_1 e z_2 tali che il punto di coordinate

[1'] Un insieme è denso sulla curva se ogni punto della curva è punto di accumulazione dell'insieme. Essendo la curva decrescente un insieme numerabile e denso sulla curva è dato per esempio dallo insieme dei punti della curva che hanno ascissa razionale.

$(\log |z_1|, \log |z_2|)$ sia al di sotto di tutte le rette radenti. Ora data la densità dell'insieme dei punti presi sulla curva, qualora un punto $(\log |z_1|, \log |z_2|)$ trovasi nella parte del piano dove la curva volge la convessità, esiste certamente una retta radente che lascia tale punto al di sopra.[1'] Dunque l'insieme dei punti nei quali la nostra serie converge non è altro che l'insieme dei punti (z_1, z_2) tali che nel piano (t_1, t_2) i punti di coordinate $(\log |z_1|, \log |z_2|)$ sono situati sulla concavità della curva. Ciò in base ai risultati ottenuti porta ad affermare che la regione piana situata nella concavità della curva rappresenta nel piano (t_1, t_2) il campo totale di convergenza della serie.[2'] Se la curva data risulta completata a destra da una retta verticale basterà aggiungere alla serie ottenuta una serie $P_0(z_1)$ della sola z_1 che abbia come raggio di convergenza R_1. Avvertiamo che tutto ciò che abbiamo detto sulle serie doppie non sempre è stato completamente esteso alle serie multiple. La convergenza di una serie doppia è stata finora riguardata soltanto come una convergenza assoluta. Osserviamo ora che la serie doppia si incontra per la prima volta in analisi come serie di Taylor, la quale è una serie che viene sommata in modo speciale, per diagonali, cioè aggregando i termini dello stesso grado:

$$a_{00} + (a_{01} \cdot z_1 + a_{10} \cdot z_2) + (a_{02} \cdot z_1^2 + a_{11} z_1 z_2 + a_{20} z_2^2) + \dots .$$

Orbene questo modo di sommazione conduce in generale alla definizione di campo di convergenza più esteso del totale. Come esempio, consideriamo nel campo reale, la serie

[1'] Mentre il punto è certamente al di sotto di tutte le rette radenti se è situato sulla concavità della curva, giacchè questa è convessa e perciò ogni retta radente la lascia tutta da una parte.

[2'] Nella dimostrazione precedente ci siamo serviti del cosiddetto principio di condensazione, introdotto per la prima volta in analisi da Hankel, il quale, ispirandosi a un'idea di Riemann, dimostrò che, data una funzione con una singolarità in un punto, per esempio nell'origine, se ne può costruire un'altra avente l'analoga singolarità nei punti di ascissa razionale. Cantor diede poi un principio generale partendo da una funzione $\varphi(x)$ avente una singolarità nell'origine e costruendo la funzione $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi(x, \alpha_n)$ dove α_n costituiscono un insieme numerabile e le c_n sono scelte in modo da assicurare la equiconvergenza della serie considerata. Con ciò si ha una maggiore generalità e si evita una possibile condensazione delle singolarità.

geometrica:

$$\frac{1}{1-x-y} = \sum_{n=0}^{\infty}(x+y)^n.$$

Riguardando la convergenza della serie come convergenza assoluta, questa serie converge per $|x+y|<1$. Il suo campo di convergenza è costituito cioè dai punti interni al quadrato limitato dalle rette parallele $x+y=1$, $x+y=-1$ e dalle rette parallele $x-y=-1$, $x-y=1$. Se invece sciegliamo tutte le parentesi e consideriamo la serie doppia ottenuta sommando per diagonali, cioè aggregando i termini di ugual grado, la serie converge per: $|x|+|y|<1$. Ora si vede subito che il nuovo campo di convergenza non coincide col precedente ed è più esteso, essendo precisamente la striscia limitata dalla prima delle suddette coppie di rette parallele. Se invece di variabili reali si tratta di una serie di due variabili complesse si può dire lo stesso considerando i moduli in luogo dei valori assoluti. Cambiando dunque il metodo di sommazione varia il campo di convergenza di una serie doppia di potenze. Vogliamo definire un'altra specie di campo di convergenza. Partiamo da una serie di una variabile che converge in un campo circolare. Operando una sostituzione lineare si ottiene una serie nella nuova variabile la quale è ancora convergente in un campo circolare, che è il trasformato del primitivo campo mediante la sostituzione. Si dice che il campo di convergenza è invariante rispetto alle sostituzioni lineari. Ciò non affatto vero per le serie doppie, per le quali il campo totale non è invariante. Se si opera cioè nel piano delle due variabili una sostituzione lineare, la nuova serie non ha in generale come campo di convergenza il trasformato del campo di convergenza della serie primitiva. Si pone perciò il problema di definire per le serie doppie il campo invariante di convergenza, cioè il campo che risulta invariante rispetto alle sostituzioni lineari. Tale campo in generale è più esteso del campo totale. Esso coincide col campo ottenuto mediante la sommazione per diagonali, ma può essere anche definito direttamente nel modo seguente. Sia data la serie:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} a_{n,m}\ z_1^m\ z_2^n$$

per la quale definiamo la convergenza come convergenza assoluta. Siano ancora:

$$z_1 = \alpha z_1' + \beta z_2' \;\; ; \;\; z_2 = \gamma z_1' + \delta z_2'$$

le equazioni di una trasformazione lineare che conserva l'origine[1']. La serie, in virtù della sostituzione si trasforma in un'altra in z'_1, z'_2

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} b_{m,n}\, {z'_1}^m\, {z'_2}^n$$

la quale, come si è detto converge in un campo che non è, in generale, il trasformato del primitivo. Come esempio si consideri la serie:

$$\frac{1}{1-z_1-z_2} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \binom{m+n}{n}\, z_1^m\, z_2^n$$

la quale converge per:

$$|z_1| + |z_2| < 1. \tag{24}$$

Operando la sostituzione lineare:

$$z'_1 = z_1 + z_2 \qquad z'_2 = z_1 - z_2$$

la serie si trasforma nella seguente: $\sum_{n=0}^{\infty} {z'_1}^n$ la quale converge per $|z'_1| < 1$ ossia per $|z_1 + z_2| < 1$, relazione questa che definisce un campo più ampio del campo definito dalla (24). Orbene si definisce "campo invariante di convergenza" di una serie doppia l'insieme somma di tutti i campi di convergenza delle serie trasformate, in modo che in ogni punto di tale campo invariante converge una delle serie trasformate. Ritorniamo ora al metodo di sommazione per diagonali per sommare i campi che vengono definiti da tale metodo. Poniamo

$$z_1 = \lambda t \ \ ; z_2 = \mu t. \tag{25}$$

Sostituendo nella serie e raccogliendo tutte le potenze uguali di t si ottiene una serie semplice di potenze nella variabile t, serie il cui campo di convergenza è un cerchio. La serie dunque converge e rappresenta una funzione analitica in tutti i punti (z_1, z_2) ottenuti ponendo: $z_1 = \lambda t$, $z_2 = \mu t$, quando t è nel suddetto cerchio. Ora le (25) sono le equazioni

[1'] Non è il caso di soffermarsi a verificare l'invarianza del campo rispetto ad una sostituzione che muti l'origine.

di un piano caratteristico dell'S_4[1']. Sopra tale piano abbiamo anche un cerchio di convergenza. Al variare di λ e μ varia il piano e quindi il cerchio. L'insieme dei punti interni a questi cerchi costituisce un campo che chiamasi circolare. È un campo dotato di centro e tale che ogni piano caratteristico lo taglia in un cerchio. Come si vede si ha una specie di prolungamento alla Mittag-Leffler. Invece di considerare la serie in tutto lo spazio si considera su di un piano caratteristico per l'origine. In questo piano si trova il cerchio di convergenza della serie sommata per diagonali allo stesso modo che Mittag-Leffler considera la serie su di una retta per l'origine e su questa il segmento sul quale converge la serie stessa. Dopo si fa variare il piano caratteristico per la origine e si ottiene il campo allo stesso modo che Mittag-Leffler facendo variare la retta ottiene la stella. Questa considerazione ci fa pensare [che *n.d.c.*] volendo ancora generalizzare il metodo su ogni piano caratteristico si potrebbero considerare le rette per l'origine e su ogni retta il segmento di convergenza. Si avrebbe così una stella su ogni piano caratteristico e verrebbe infine un campo che si potrebbe chiamare, invece di circolare, stellare, in quanto risulta tagliato in una stella da ogni piano caratteristico. Ma non è il caso di fermarci più oltre su questo argomento. Occorre far vedere che il campo circolare ora definito coincide col campo invariante e cioè un punto nel quale converge una serie trasformata appartiene a detto campo e viceversa, in ogni punto del campo circolare converge una serie trasformata.

[1'] Un piano dello spazio a quattro dimensioni è rappresentato da due equazioni lineari nelle coordinate (x_1, y_1, x_2, y_2) dello spazio. Ora le (25) danno luogo a due equazioni lineari nelle suddette variabili ma non a due relazioni generiche. Esse danno luogo ad una relazione del tipo: $az_1 + bz_2 + c = 0$, che risulta equivalente a due equazioni reali nelle quali i coefficienti delle variabili x_1, y_1, x_2, y_2 non sono indipendenti. I piani dello spazio a quattro dimensioni definiti da una simile equazione si chiamano piani caratteristici.

PARTE II - L'INTEGRAZIONE

Ci proponiamo di definire l'operazione d'integrazione per le funzioni di due variabili complesse. È necessario all'uopo premettere alcune nozioni sugli integrali di superficie nel campo reale. Poniamoci nello spazio ordinario a tre dimensioni, nel quale, al solito indicheremo con x, y, z le coordinate di un punto generico. Vogliamo dal [dare *sic*] significato al singolo [simbolo *sic*] $\int_S f(x, y, z)dx\, dy$ dove $f(x, y, z)$ è una funzione che, per ora non occorre precisare, ed S è una superficie dello spazio definita mediante equazioni parametriche del tipo:

$$x = x(u, v) \;\; y = y(u, v) \;\; z = z(u, v) \;\; (u, v) \in D$$

essendo D un dominio del piano (u, v) con frontiera regolare. In D supponiamo definite le tre funzioni $x(u, v); y(u, v); z(u, v)$, che inoltre supporremo generalmente regolari ed a rapporti incrementali limitati anche nei punti nei quali mancano le derivate parziali, punti costituenti al più una linea regolare di equazione $v = q(u)$, oppure $u = \psi(v)$. Porremo per definizione:

$$\int_S f(x, y, z)dx\, dy = \int_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}du\, dv.$$

L'espressione:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}du\, dv$$

rappresenta la proiezione dell'elemento di superficie S sul piano (x, y). Se con $d\sigma$ designiamo l'elemento di superficie, con γ l'angolo della normale orientata con l'asse z, l'integrale suddetto si può indicare col simbolo:

$$\int_S f(x, y, z) \cos\gamma\, d\sigma.$$

Il verso della normale è fissato dalla rappresentazione parametrica, una volta che sia stato orientato il piano (u, v). Al solito si assume come verso positivo di rotazione sul piano (u, v) il verso che porta il semiasse positivo u sul semiasse positivo v. Si tenga dunque ben presente che il verso della normale e perciò il segno dell'integrale dipende essenzialmente dalla rappresentazione parametrica adottata per la superficie. Se con α e β indichiamo gli angoli che la normale orientata alla superficie forma rispettivamente con l'asse x e con l'asse y, si ha ancora, in base alla precedente definizione:

$$\int_S f(x,y,z)dy\,dz = \int_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}du\,dv = \int_S f(x,y,z)\cos\alpha\,d\sigma$$

$$\int_S f(x,y,z)dz\,dx = \int_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}du\,dv = \int_S f(x,y,z)\cos\beta\,d\sigma.$$

Abbiamo così definito gli integrali di superficie mediante gli integrali doppi estesi ad un dominio piano. Da tale definizione si potrebbero ricavare le condizioni da imporre alla funzione $f(x,y,z)$ perchè si possa assicurare l'esistenza dell'integrale. Per quanto riguarda il nostro scopo questa ricerca non ha interesse, giacchè le funzioni che intervengono nella integrazione complessa, che dovremo definire, sono addirittura analitiche nel campo reale, ciò che rappresenta una condizione più ampia della semplice continuità che è sufficiente. Si possono estendere agli integrali di superficie tutte le proprietà degli integrali doppi, in particolare la proprietà additiva. A tale proprietà si fa ricorso per parlare di integrali estesi a superficie che non si lasciano esprimere mediante un solo sistema di equazioni parametriche, quale ad esempio, la sfera. È evidente infatti che se una superficie, come la sfera, si può rappresentare mediante due o più sistemi di equazioni parametriche, cioè se si può considerare composta di due o più porzioni distinte, ciascuna delle quali si rappresenta mediante un sistema di equazioni parametriche, si può definire l'integrale esteso alla superficie come somma degli integrali estesi a ciascuna porzione di superficie. Qui però occorre tener conto di un'osservazione già fatta, che cioè il segno di integrazione dipende dalla rappresentazione parametrica adottata; pertanto è necessario adottare per le varie, porzioni della superficie rappresentazioni parametriche coerenti: questa necessità analitica si riconnette alla necessità geometrica di definire ciò che si chiama il verso o la faccia positiva della superficie. Limitandoci alle superfici per le quali si possono definire due facce, prendiamo in considerazione un caso particolare, la sfera. Per rappresentare questa superficie non basta un solo sistema di equazioni parametriche; due sistemi sono sufficienti, essendo la sfera divisibile in due calotte, ciascuna delle quali è rappresentabile da un sistema di equazioni. Allo scopo di far si che le due rappresentazioni siano tra loro coerenti, notiamo che le due calotte hanno in comune il bordo, una curva cioè che indicheremo con Γ. Sul piano (u, v) indichiamo con D il dominio base della rappresentazione di una delle due calotte e con D' il dominio base della rappresentazione dell'altra calotta. Essi sono due domini semplicemente connessi. Le rappresentazioni parametriche mediante due terne di equazioni, pongono una corrispondenza tra D e la prima calotta ed una corrispondenza tra D' e la seconda calotta, in modo che la curva Γ corrisponde ad FD per la prima rappresentazione ed a FD' per la seconda. Ne segue che resta definita una terza corrispondenza tra FD ed FD', chiamando corrispondenti due punti, uno di FD e l'altro di FD', ai quali, per le equazioni poste corrisponde lo stesso punto di Γ. Orbene questa corrispondenza subordinata alle prime due deve essere tale che, mentre il punto variabile su FD percorre FD in un certo verso, il punto corrispondente percorre FD' nel verso opposto. Ciò, in altri termini equivale a dire che le due corrispondenze poste dalle equazioni tra D e la prima calotta e tra D' e la seconda calotta debbano essere tali che, mentre la prima fissa un verso su Γ corrispondente al verso positivo su FD, la seconda in corrispondenza del verso positivo su FD' fissa su Γ il verso opposto a quello fissato sulla prima. È evidente che le considerazioni precedenti non sono affatto peculiari della sfera, ma si adattano a qualsiasi superficie divisibili in due parti, ciascuna delle quali è rappresentabile mediante una terna di equazioni parametriche su un dominio piano semplicemente connesso. A tale categoria di superficie non appartiene, per esempio, il toro. Questa superficie può, mediante due meridiani essere divisa in due parti, ciascuna delle quali, a modo di un cilindro aperto, trova rappresentazione su una corona circolare. Si vede allora facilmente, come per il toro, possano essere fatte considerazioni analoghe alle precedenti, tenendo conto che la frontiera completa di ciascun dominio base è costituita da due circonferenze, alle quali corrisponde il bordo comune alle due porzioni di superficie, bordo costituito anch'esso da due distinte curve. Si vede anzi che le considerazioni possono, senza difficoltà, essere estese ad una qualsivoglia superficie che sia divisibile in due parti, ciascuna delle quali sia rappresentabile su un dominio piano connesso con un numero qualsiasi di contorni, purchè il numero dei contorni sia lo stesso per entrambi i domini. In base a queste considerazioni si può dare una definizione generale nei seguenti termini: dati, nel piano (u, v), due domini connessi D e D', con lo stesso numero di contorni, sia definita in ciascuno dei due domini una terna di funzioni $x(u, v)$; $y(u, v)$; $z(u, v)$, generalmente regolari e tali che le due terne di equazioni:

$$x = x(u, v); \qquad y = y(u, v); \qquad z = z(u, v)$$

fissino una corrispondenza fra i domini ed un insieme dello spazio (x, y, z), tale che non vi sia coppia alcuna di punti, non appartenenti entrambi allo stesso dominio e non situati entrambi sulle frontiere, ai quali corrisponda lo stesso punto, mentre ad FD e ad FD' corrisponda lo stesso insieme; di modo che resta subordinata una corrispondenza tra FD ed FD', la quale sia tale che mentre FD viene percorsa in un certo verso, il punto corrispondente percorra FD' nel verso opposto. L'insieme dei punti dello spazio corrispondente, mediante le terne di equazioni, ai due domini piani, si chiama "superficie chiusa" generalmente regolare. Se la corrispondenza definita dalle equazioni è biunivoca relativamente ai punti interni di D e D', la superficie si dice anche "a punti semplici". Daremo il nome di "superficie aperta" alla superficie che si rappresenta mediante un solo sistema di equazione parametrica su un dominio piano connesso con un numero qualsiasi di contorni. Passando all'S_n la definizione di "superficie aperta" si estende formalmente. Sia D un dominio connesso, che supporremo ancora a frontiera regolare del piano (u, v) e $x_i(u, v)$ (per $i = 1, 2....n$) siano n funzioni definite e generalmente regolari in D. Chiamiamo "superficie aperta" la varietà a due dimensioni dell'S_n che, mediante le equazioni $x_i = x_i(u, v)$ (per $i = 1, 2..., n$) corrisponde al dominio D. Per definire una superficie chiusa dell'S_n procediamo nel modo seguente: In uno spazio a tre dimensioni, nel quale indichiamo con X, Y, Z le coordinate correnti, sia assegnata una superficie Σ chiusa, mediante due terne di equazioni:

$$X = X(u, v); \qquad Y = Y(u, v); \qquad Z = Z(u, v)$$

con (u, v) variabile in due domini piani, D, D', tra le frontiere dei quali le equazioni pongono la corrispondenza già precedentemente specificata. Indicando con P il punto variabile sulla superficie poniamo:

$$x_i = \varphi_i(P) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

le funzioni $\varphi_i(P)$ del punto P, risultano funzioni di u e v, definite in D e D' mediante le due terne di equazioni (1). Supporremo le funzioni φ_i dotate di derivate generalmente continue. Le (2) definiscono una varietà a due dimensioni dell'S_n, varietà che diremo "superficie chiusa". Vogliamo accennare alla definizione di superficie dal punto di vista della topologia. Non è però il caso di porsi nelle più generali ipotesi di questa moderna branca della Matematica, dove alla parola "punto" non si da il significato che comunemente le si attribuisce in analisi, ma si definiscono "punti" enti sui quali si fa l'unica ipotesi che si possa dare per essi una nozione di "intorno". La definizione di superficie non è più legata all'immagine intuitiva che si ha delle comuni superfici note dalla geometria e si parla perciò di "superficie astratte". Le nostre considerazioni saranno limitate ai punti di uno spazio euclideo. Cominciamo da alcune considerazioni relative al piano. Per curva piana continua, in analisi, si definisce, come è noto, l'insieme dei punti (x, y) del piano, che corrispondono ai punti di un intervallo (t_0, T), mediante due equazioni parametriche: $x = x(t)$; $y = y(t)$ per $t \in (t_0, T)$ essendo $x(t)$ ed $y(t)$ funzioni continue di t in (t_0, T). Se si ha: $x(t_0) = x(T)$ e $y(t_0) = y(T)$ la curva è "chiusa". Se a due valori distinti di t e non coincidenti entrambi con gli estremi, non corrisponde mai lo stesso punto la curva si chiama "semplice", nel qual caso la corrispondenza tra la curva ed i punti del segmento di estremi t_0 e T è biunivoca. Comunemente si ritiene come acquisita dall'intuizione la verità della proposizione seguente: "una curva piana, semplice e chiusa, divide il piano in due regioni connesse, aventi per comune frontiera la curva e delle quali una sola è limitata e dicesi "interna", mentre l'altra non è limitata e dicesi "esterna" ". Tale proposizione però viene dimostrata rigorosamente in base ai postulati della geometria. Essa costituisce l'enunciato, non completo, del "teorema di Jordan". Due domini piani limitati ciascuno da una o più curve chiuse si dicono "topologicamente equivalenti" se si può stabilire una corrispondenza biunivoca e continua tra i loro punti. Una tale corrispondenza associa il contorno di un dominio al contorno dell'altro. Questa definizione di equivalenza topologica traduce l'altra intuitiva secondo la quale i domini vengono detti equivalenti se uno si può ridurre all'altro con deformazioni continue senza strappi. Ogni poligono semplice, nel senso della geometria elementare, è equivalente ad un cerchio. Più in generale, ogni dominio piano connesso, la cui frontiera è una curva semplice e chiusa, è equivalente ad un cerchio. Ogni dominio piano connesso a due contorni, costituito da due curve semplici e chiuse è equivalente ad una corona circolare. Passiamo allo spazio a tre dimensioni. Sia D un dominio connesso ad unico contorno del piano (u, v) e siano

$$x = x(u, v); \qquad y = y(u, v); \qquad z = z(u, v) \qquad (u, v) \in D$$

tre equazioni che pongano una corrispondenza tra i punti di D ed un insieme dell'S_3. Supponiamo le tre funzioni $x(u, v)$; $y(u, v)$; $z(u, v)$ continue in tutto D ed inoltre tali che le (3) risultino invertibili, nel senso che permettono di esprimere u, v in funzione di x, y, z. Le (3) definiscono allora una corrispondenza biunivoca e continua tra D e l'insieme dell'S_3 che è una "superficie aperta semplice".

Diremo che tale "superficie aperta semplice" è equivalente al dominio D. Possiamo allora affermare: "una superficie aperta semplice, rappresentabile in un dominio ad unico contorno, è equivalente ad un cerchio o ad un qualsiasi poligono semplice". Analogamente si ha: "una superficie aperta semplice rappresentabile su un dominio connesso a due contorni è equivalente ad una corona circolare". Ad ogni curva piana contenuta in D corrisponde nell'S_3 una curva sghemba tracciata sulla superficie. Si vede facilmente che: "una superficie aperta semplice è connessa" nel senso che due qualsiasi suoi punti possono essere congiunti con una linea continua appartenente tutta alla superficie. Basta all'uopo considerare la curva corrispondente ad una curva piana congiungente i due punti corrispondenti del dominio connesso D e contenuta in D. Se la superficie non è semplice possono farsi delle ipotesi sulle funzioni in modo che le (3) siano invertibili localmente. Una superficie rappresentata dalle (3) è allora tale che, per ogni punto di essa si può determinare un intorno che risulta equivalente ad un cerchio e quindi anche ad un triangolo e che perciò si può biunivocamente rappresentare su un triangolo piano. Questa osservazione suggerisce un modo di introdurre il concetto di superficie dal solo punto di vista topologico, senza far ricorso alla rappresentazione parametrica. Senza limitare le nostre considerazioni all'S_3 supponiamo però di operare sempre in uno spazio euclideo. Se un insieme dell'S_r è tale che per ogni punto di esso esiste un intorno equivalente ad un triangolo piano, chiameremo ogni tale intorno un "triangolo elementare" e diremo che l'insieme è decomponibile in triangoli elementari. Non c'è bisogno di fermarci a spiegare che cosa debba intendersi per lati, vertici, punti interni di un triangolo elementare. Chiameremo “catena” un insieme numerato di triangoli elementari tali che ognuno di essi abbia un lato, e soltanto uno, in comune col precedente. Se l’insieme è finito la catena si dirà “semplice”. Se inoltre l’ultimo triangolo ha un lato in comune col primo la catena semplice si dirà “chiusa”. Ciò premesso diciamo “superficie” un insieme decomponibile in triangoli elementari soddisfacenti alle seguenti ipotesi:

a) ogni punto che appartiene ad un triangolo senza appartenere ad un lato non appartiene ad alcun altro triangolo insieme a tutto il suo intorno.

b) un punto che appartiene ad un lato di un triangolo, senza essere vertice, appartiene ancora ad un lato di un altro triangolo. I due triangoli hanno in comune tutto e solo il lato al quale appartiene il punto, il quale poi, insieme a tutto un suo intorno, non appartiene ad alcun altro triangolo.

c) se un punto è vertice di un triangolo, è vertice di una catena semplice e chiusa di triangoli ed, insieme ad un suo intorno non appartiene ad altri triangoli oltre quelli della catena.

Se le ipotesi si modificano stabilendo che:

d) la catena di triangoli determinata da un vertice sia semplice, ma non necessariamente chiusa e che, di conseguenza, vi possono essere lati “scoperti” che appartengono cioè ad un solo triangolo la superficie si dice “orlata” e l’insieme dei lati scoperti ne costituiscono “l’orlo” o il “bordo”.

Quando un insieme sia stato decomposto in triangoli elementari soddisfacenti alle poste ipotesi si dice che ne è stata eseguita una “triangolazione”. Faremo l’ulteriore ipotesi che la “superficie definita per triangolazione sia connessa”. Potendosi allora congiungere due punti appartenenti a due triangoli differenti con una linea tutta sulla superficie, cioè composta di punti, ciascuno dei quali appartiene almeno ad un triangolo segue che: “due qualsivoglia triangoli della triangolazione sono congiunti da una catena di elementi”. Anzi non è difficile far vedere che: “la catena è necessariamente semplice”.[1′] Si deduce da ciò che: “se una triangolazione consta di infiniti triangoli si tratta necessariamente di una in-

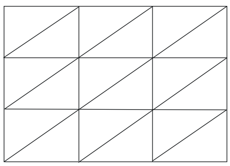
[1′] Se infatti gli elementi della catena sono infiniti si può congiungere un punto di uno dei triangoli con un punto dell’altro mediante una curva che attraversi tutti i triangoli finità numerabile". Partendo infatti da uno qualsiasi dei triangoli, $\triangle$, si possono numerare prima quelli, in numero finito, che hanno un lato o un vertice in comune con esso, indi per ognuno di questi, nell'ordine già posto, procedere allo stesso modo, tralasciando via via i triangoli già numerati. Nessun triangolo resta escluso dalla numerazione, giacchè ogni triangolo è congiunto con $\triangle$ attraverso una catena semplice di triangoli. Si hanno dunque due specie di superficie secondo che la triangolazione consta di un numero finito o di una infinità numerabile di triangoli.[1'] A noi interessano soltanto le superficie la cui triangolazione consta di un numero finito di elementi e perciò alle ipotesi poste sulla triangolazione aggiungeremo ancora l'altra: "che la triangolazione cioè, consti di, un numero finito di triangoli". Si può costruire, ed [in *n.d.c.*] infiniti modi, un'immagine topologica piana di una superficie, designando sul piano tanti triangoli quanti sono i triangoli elementari della triangolazione e con gli stessi legami. Naturalmente ciò non può farsi senza ripetere alcuni lati. Se dopo aver disegnato sul piano un'immagine topologica di una superficie, la si taglia

---

della catena e sia tutta sulla superficie, costituendo perciò un insieme chiuso di punti della superficie. In ogni triangolo si può scegliere un punto che sia anche sulla curva, ottenendosi un insieme infinito di punti della curva. Un punto di accumulazione di tale insieme è sulla curva, quindi sulla superficie e pertanto in un triangolo. D'altra parte in ogni suo intorno vi sono infiniti punti dell'insieme e cioè punti appartenenti ad infiniti triangoli, ciò che è contro l'ipotesi della triangolazione.

[1'] Se una triangolazione consta di infiniti triangoli, preso in ognuno di essi un punto, si ha un insieme di infiniti punti della superficie, i cui punti di accumulazione non possono appartenere alla superficie, giacchè un punto di accumulazione contiene in ogni suo intorno punti di infiniti triangoli e, come tale, non può appartenere a nessun triangolo. Viceversa se alla superficie appartiene un insieme, A, di punti i cui punti di accumulazione non appartengono alla superficie, questa non può essere triangolata con un numero finito di triangoli. Ed infatti ogni triangolo, non potendo contenere punti di accumulazione di A, non può contenere che un numero finito di punti di tale insieme e quindi un numero finito di triangoli potranno contenere soltanto un numero finito di punti di A. Dunque: "condizione necessaria e sufficiente perchè una superficie, definita per triangolazione, sia formata da un numero finito di triangoli è che ogni insieme di infiniti punti della superficie sia chiuso".

e, contorcendola e piegandola opportunamente, si fanno coincidere i lati che sul piano si son dovuti disegnare distinti, ma che invece rappresentano lo stesso lato della triangolazione, si ha una superficie che si può ritenere come l'immagine più semplice dell'S_3 della superficie in questione. Un esempio di superficie non orlata è dato dalla superficie totale di un ottaedro. Si vede infatti immediatamente come può farsi la decomposizione della superficie in otto parti, rappresentate dalle sue stesse otto facce. Anche una sfera si può decomporre in otto triangoli elementari. Basta considerare un ottaedro elementare che abbia lo stesso centro e proiettare dal centro sulla sfera i punti della superficie dell'ottaedro. Anche per il toro è facile immaginare una triangolazione. Il toro si può considerare partendo da un rettangolo piegandolo, senza contorcerlo, in modo da fare coincidere i lati più lunghi e da far sì che i lati più corti diano luogo a due circonferenze. Piegando ancora il cilindro così ottenuto in modo da far coincidere i due orli circolari, si ha il toro.



È facile dividere il rettangolo in triangoli in modo che una volta eseguite le operazioni suddette i triangoli sul toro soddisfino alle ipotesi della triangolazione. Basta operare come nella figura, la quale da un'immagine topologica piana del toro qualora i due lati dei due triangoli situati nella stessa striscia, verticale od orizzontale, e su due lati opposti del rettangolo si pensino come coincidenti sulla superficie. Dunque: l'ottaedro, la sfera, il toro, sono superficie non orlate. Esempi di superficie orlate sono dati dal quadrato, dalla semisfera o da una calotta sferica, dalle due porzioni che si ottengono dal toro dividendolo in due parti mediante due meridiani. Un esempio di superficie orlata è offerto anche dal "Nastro di Möbius". Si ottiene da un rettangolo saldando i due lati opposti più corti, dopo aver contato una sola volta il rettangolo stesso. Senza dilungarci in troppe considerazioni particolari, assumiamo come intuitiva l'idea che una superficie piana come il rettangolo sia dotata di due parti tali che non si può passare dall'una all'altra senza attraversare o la superficie stessa o il bordo. Prendiamo ora un rettangolo, distinguiamone le due parti, per esempio, colorandole con due colori differenti, indi operiamo con esso in modo da ottenere il toro. Ottenuta questa superficie, partendo da un punto su una delle due facce precedentemente segnate e seguendo un cammino chiuso ci [si *sic*] rimane sempre sulla stessa faccia, a meno di non attraversare la superficie. La stessa circostanza si verifica per la sfera e la semisfera. Per quest'ultima si passa da una faccia all'altra o attraverso la superficie o attraverso il bordo. Le cose non procedono allo stesso modo per la superficie di Möbius. Se, dopo, aver distinte le due facce del rettangolo, operiamo in modo da ottenere tale superficie, partendo da un punto di una faccia e seguendo un cammino chiuso che attraversi una sola volta il lato dove il rettangolo è stato saldato, senza però attraversare l'orlo della superficie, si ritorna al punto si [di *sic*] partenza trovandosi sull'altra faccia del rettangolo. La sfera, la semisfera, il toro e le superficie che si comportano allo stesso modo si dicono "bilatere", mentre quelle sulle quali, come sul nastro di Möbius, non è possibile distinguere le due facce, si dicono "unilatere". Le superficie unilatere si dicono anche "ad indicatrice invertibile". Con la denominazione "indicatrice" si designa un piccolo cerchio di centro in un punto della superficie ed orientato in un certo verso. Orbene se al punto, centro di un'indicatrice, si fa percorrere un cammino chiuso sulla superficie, il cerchio non muta mai in verso se ritorna alla posizione di partenza con lo stesso verso, qualunque sia il cammino, se la superficie è bilatera, mentre sulle superficie unilatere esistono cammini chiusi che fanno cambiare il verso all'indicatrice, che, dopo che il suo centro ha percorso un tale cammino, ritorna sul cerchio di partenza col verso cambiato. Anche per la normale avviene qualcosa di simile. Si consideri una superficie o un modello topologico nell'S_3. In un punto si orienti la normale, indi si faccia percorrere al punto un cammino chiuso sulla superficie, che non attraversi nè la superficie stessa nè il bordo se la superficie ne è dotata. Se la superficie è bilatera, il verso della normale non cambia, qualunque sia il cammino, mentre sulla superficie unilatera esistono cammini che fanno cambiare il verso della normale, che ritorna al punto di partenza, dopo aver percorso uno di tali cammini, col verso opposto a quello di partenza. A noi interessano le sole superficie bilatere. Restringendo pertanto ad esse soltanto le nostre considerazioni le distingueremo in "aperte" e "chiuse", secondo che sono dotate o no di orli, secondo che cioè la triangolazione presenta o no lati scoperti. Essi coincidono con le superficie aperte e chiuse già definite analiticamente. Si dimostra cioè che ogni superficie aperta può rappresentarsi analiticamente su un sol dominio piano connesso avente tanti contorni quanti sono gli orli della superficie; mentre ogni superficie chiusa può rappresentarsi analiticamente su due domini piani nel modo precisato. Una proprietà delle superficie chiuse è data dal fatto che essa può venir divisa in due superficie aperte mediante tagli praticati su di essa seguendo linee chiuse. La sfera, mediante un taglio chiuso, si riduce a due calotte sferiche, che sono due superficie aperte, ciascuna ad un sol bordo, che è comune ad ambedue ed è la curva lungo la quale si pratica il taglio. Il toro, mediante due tagli lungo due meridiani, si riduce a due superficie aperte, ciascuna con due bordi, che sono gli stessi per entrambe. Questa circostanza topologica trova corrispondenza nella diversa rappresentazione analitica dei due tipi di superficie. Una superficie chiusa risulta difatti sempre composta di due superficie aperte aventi lo stesso bordo. Segue ancora da ciò che da due superficie aperte [con *n.d.c.*] gli stessi orli se ne può ottenere una sola chiusa. Dal punto di vista topologico ciò si ottiene mediante triangolazioni della superficie che abbiano gli stessi lati scoperti sugli orli comuni. Dal punto di vista analitico occorre che le rappresentazioni analitiche delle due superficie su due domini piani siano coerenti nel modo spiegato. Qualora dunque nella definizione di superficie non si tiene conto di tale coerenza, se cioè si ripete la definizione data di superficie chiusa senza però imporre la corrispondenza tra le frontiere dei due domini piani, si viene a definire una superficie che consta di due superficie aperte, ma è anch'essa aperta. Abbiamo già parlato della proprietà delle superficie consistente nella conservazione del verso della normale. Per le superficie chiuse a punti semplici sussiste però un teorema che permette di distinguere le due facce in "interna" ed "esterna" e che corrisponde al teorema di Jordan relativo alle curve chiuse semplici:

"ogni superficie chiusa a punti semplici divide lo spazio in due regioni connesse, che hanno per comune frontiera la superficie stessa e delle quali una sola è limitata e dicesi "interna" mentre l'altra, non limitata, dicesi "esterna" ". Si consideri allora la retta normale in un punto della superficie. Essa è divisa dal punto stesso in due semirette, delle quali una, almeno in un tratto limitato da un conveniente intorno del punto, è contenuta nella regione esterna, l'altra nella regione interna. Il verso della prima semiretta è il verso esterno della normale. Diamo qualche semplice esempio di superficie dell'S_4. Siano C_1 e C_2 due curve, semplici e chiuse, situate in due piani, nei quali indicheremo rispettivamente con

(x_1, x_2) e (x_3, x_4) le coordinate correnti. L'insieme di tutti i punti (x_1, x_2, x_3, x_4) ottenuti al variare di (x_1, x_2) su C_1 e di (x_3, x_4) su C_2, indipendentemente l'uno dall'altro, cioè l'insieme prodotto di C_1 e C_2 è evidentemente una varietà a due dimensioni dell'S_4. Si vede facilmente che si tratta di una superficie. Essa è infatti equivalente ad un toro nell'S_3, giacchè si può porre una corrispondenza biunivoca e continua tra essa e il toro nel modo seguente: ciascuna delle due curve C_1 e C_2 essendo semplice e chiusa, è equivalente ad una circonferenza. Fissato allora sul toro un parallelo si può porre in corrispondenza biunivoca una delle due curve, per esempio la C_1 ad ogni punto P di C_1 corrisponde un punto P' sul parallelo. L'insieme dei punti $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3, x_4)$ della varietà, dove $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ sono le coordinate del punto P mentre il punto (x_3, x_4) varia su C_2, è equivalente a C_2 e come tale, si può porre in corrispondenza biunivoca col meridiano del toro passante per P'. Al variare di P su C_1 il meridiano descrive il toro. Se invece di due curve chiuse si considerano su uno dei piani, per esempio sul piano (x_1, x_2) un arco, L, di curva semplice, e sull'altro piano una curva semplice e chiusa C_2, l'insieme, Σ, prodotto è ancora una varietà a due dimensioni dell'S_4 ma si vede facilmente che si tratta di una superficie aperta a due bordi, equivalente ad un cilindro aperto, cioè, per intenderci, ad una botte senza fondi. L'arco L difatti è equivalente ad un segmento e quindi si può porre in corrispondenza col segmento staccato dagli orli del cilindro su una generatrice del cilindro stesso. Poichè la corrispondenza sia biunivoca e continua occorre far corrispondere agli estremi di L gli estremi del segmento. All'insieme dei punti di Σ che si ottengono accoppiando un punto, P, di L con i punti di C_2 si può far corrispondere sul cilindro la circonferenza generatrice del cilindro passante per il punto P', corrispondente del punto P sul segmento di generatrice. Al variare di P su L la circonferenza descrive il cilindro. I bordi, di Σ sono due e precisamente uno costituito dall'insieme dei punti dell'S_4 ottenuto accoppiando un estremo di L con i punti di C_2, l'altro formato dall'insieme che si ottiene accoppiando ai punti di C_1 l'altro estremo di L. Consideriamo allora la varietà costituita dai punti dell'S_4 che si ottengono accoppiando un estremo di L con i punti del dominio limitato che ha per frontiera la curva C_2 e l'altra varietà che si ottiene accoppiando l'altro estremo di L con i punti dello stesso dominio. Esse sono evidentemente due superficie aperte, ciascuna delle quali è equivalente ad un cerchio e ciascuna avente per bordo uno dei bordi di Σ. Esse equivalgono quindi ai due fondi della botte, immagine topologica di Σ. Le due superficie, cioè Σ ed i due suddetti fondi, costituiscono una superficie chiusa topologicamente equivalente ad un cilindro chiuso, ossia ad una botte completa, con i due fondi. È facile persuadersi che questa superficie, come un cilindro chiuso, si divide in due superficie aperte aventi un unico bordo comune ad entrambe e rappresentabili in un cerchio. Ritornando ora all'integrazione, teniamo presente che, in base alla proprietà additiva, l'integrale esteso ad una superficie chiusa è la somma di due integrali doppi estesi ai due domini base della rappresentazione parametrica. Si chiama "forma bilineare" in tre variabili un'espressione del tipo:

$$A(x,y,z)dy\ dz + B(x,y,z)dx\ dz + C(x,y,z)dy\ dx.$$

La relazione:

$$\int_S (A\ dy\ dz + B\ dz\ dx + C\ dx\ dy) = \int_D \left\{ A\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + B\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + C\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right\} du\ dv$$

$$= \int_S (A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma) d\sigma$$

definisce l'integrale di una forma bilineare esteso ad una superficie aperta S, di dominio base D. La definizione di integrale di una forma bilineare esteso ad una superficie chiusa si definirà, in base all'osservazione precedente, come somma di due integrali estesi ai due domini base della rappresentazione parametrica della superficie. Qui però è necessaria un'osservazione di carattere formale: l'integrale di una forma bilineare dipende dagli jacobiani. Orbene un determinante jacobiano, per esempio $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ è di segno opposto a quello $\frac{\partial(y,x)}{\partial(u,v)}$ che si ottiene scambiando le due funzioni che intervengono a formarla. Dunque l'integrale dipende dall'ordine delle funzioni nei singoli determinanti jacobiani. Al fine di togliere questa ambiguità, in una forma bilineare considereremo come essenziale l'ordine dei differenziali nei singoli termini. Una tale forma la diremo "forma bilineare simbolica" e parleremo, di conseguenza, dell'integrale di superficie di una forma bilineare simbolica, intendendo che l'ordine delle funzioni negli jacobiani sia lo stesso dell'ordine dei rispettivi differenziali nella forma. Alla forma bilineare simbolica può essere data un'espressione più simmetrica se si fa la convenzione di riguardare come non identici, bensì opposti due prodotti del tipo $dy\ dz$ e $dz\ dy$. Con tale convenzione, il termine $A\ dy\ dz$ può considerarsi come proveniente dalla somma: $\frac{1}{2}A\ dy\ dz - \frac{1}{2}A\ dz\ dy$. Questa ultima convenzione ci permette di poter definire una forma bilineare simbolica in n variabili mediante l'espressione simmetrica:

$$\sum_{ik}^{1\dots n} A_{ik} dx_i\ dx_k \qquad \text{con } A_{ik} = -A_{ki}; \qquad A_{kk} = 0.$$

Conveniamo una volta per sempre che parlando di forma bilineare senz'altra aggiunta, intendiamo parlare di forma bilineare simbolica. Data una forma bilineare in n variabili la relazione:

$$\int_S \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} dx_i\ dx_k = \int_D \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} \frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(u, v)} du\ dv$$

dove D è un dominio connesso, ad uno o più contorni, base della rappresentazione parametrica della superficie S, definisce l'integrale della forma bilineare esteso ad una superficie aperta dello spazio ad n dimensioni. Come si vede si estende formalmente la definizione data nel caso di tre sole variabili. Analogamente si estende all'S_n la definizione di integrale di una forma bilineare esteso ad una superficie chiusa. Tenendo presente la definizione data di superficie chiusa e perciò il significato dei due domini D e D', si comprende il significato della relazione:

$$\int_S \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} dx_i\ dx_k = \int_{D+D'} \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} \frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(u, v)} du\ dv.$$

Torniamo ora all'S_3 e consideriamo l'integrale di una forma bilineare esteso ad una superficie Σ, chiusa e semplice:

$$\int_\Sigma A\ dy\ dz + B\ dx\ dz + C\ dx\ dy$$

vogliamo vedere come è possibile trasformare questo integrale in un integrale di volume mediante una formula analoga a quella di Green. Indichiamo con V il dominio limitato dell'S_3 racchiuso dalla superficie Σ e consideriamo l'integrale triplo:

$$\int_V \frac{\partial C}{\partial z} dx\ dy\ dz.$$

Le note formule di riduzione danno, con evidente significato dei simboli:

$$\int_V \frac{\partial C}{\partial z} dx\ dy\ dz = \int_{V_{xy}} dx\ dy \int_{Z(X,Y)} \frac{\partial C}{\partial z} dz.$$

Essendo:[1′]

$$\int_{V_{xy}} dx\ dy \int_{Z(X,Y)} \frac{\partial C}{\partial z} dz = \int_\Sigma C\ dx\ dy = \int_\Sigma C\ \cos\gamma\ d\sigma$$

si ha:

$$\int_V \frac{\partial C}{\partial z} dx\ dy\ dz = \int_\Sigma C\ dx\ dy = \int_\Sigma C\ \cos\gamma\ d\sigma.$$

Si ottiene così l'estensione della formula di Gauss. Applicando lo stesso procedimento agli altri due integrali

$$\int_V \frac{\partial B}{\partial y} dx\ dy\ dz \qquad ; \qquad \int_V \frac{\partial A}{\partial x} dx\ dy\ dz$$

si ottengono relazioni analoghe. Sommando le tre relazioni si ha infine la formula:

$$\int_\Sigma (A\ \cos\alpha + B\ \cos\beta + C\ \cos\gamma) d\sigma = \int_V \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx\ dy\ dz.$$

Si ricordi che l'espressione in parentesi nell'integrale a secondo membro prende il nome di "divergenza" del vettore che ha per componenti A, B, C. La formula ottenuta ci permette di enunciare il teorema: "Se le tre funzioni A, B, C sono continue nel dominio V limitato da una superficie, Σ, semplice e chiusa, generalmente regolare, e sono dotate di derivate generalmente continue e limitate in $V - \Sigma$, se inoltre è nulla in V la divergenza del vettore che ha per componenti le funzioni A, B, C:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

[1′] La relazione si ottiene facilmente nel caso particolare che la superficie Σ sia incontrata in due punti da ogni perpendicolare al piano (x, y) in un punto interno al dominio V_{xy} proiezione della superficie stessa sul piano. Basta, una volta effettuata l'integrazione semplice, operare il cambiamento di variabili u e v. Si passa poi al caso generale col solito procedimento di dividere la superficie in porzioni, ognuna delle quali si trovi nelle condizioni precedenti.

risulta nullo anche l'integrale della forma bilineare

$$A\,dy\,dz + B\,dx\,dz + C\,dx\,dy \tag{5}$$

esteso alla superficie Σ". Si osservi che, nel teorema così enunciato, figura una ipotesi sovrabbondante sulle derivate, essendo sufficiente che soltanto le tre derivate parziali che figurano nella (4) siano continue in $V - \Sigma$, oppure generalmente continue e limitate anche nei punti di discontinuità. La superficie Σ essendo chiusa, l'integrale esteso ad essa equivale alla somma di due integrali estesi ciascuno ad una superficie aperta, quando naturalmente si tenga conto delle osservazioni essenziali sul verso del percorso nel bordo comune alle due superficie aperte in corrispondenza del verso positivo sul piano (u, v). Si ha in sostanza, indicando con $\Sigma^\star$ e $\Sigma^{\star\star}$ le due superficie aperte che compongono Σ

$$\int_\Sigma (A\ \cos\alpha + B\ \cos\beta + C\ \cos\gamma)d\sigma = \int_{\Sigma^\star} (A\ \cos\alpha + B\ \cos\beta + C\ \cos\gamma)d\sigma$$

$$+ \int_{\Sigma^{\star\star}} (A\ \cos\alpha + B\ \cos\beta + C\ \cos\gamma)d\sigma.$$

Questa osservazione ci permette di dare al precedente teorema la seguente forma: "Se nel dominio limitato da due superficie aperte aventi lo stesso bordo le tre funzioni A, B, C sono continue e nell'interno del dominio stesso sono generalmente continue le funzioni che ottengonsi derivando A rispetto ad x, B rispetto ad y, C rispetto a z e queste ultime risultando ivi limitate e se inoltre nel dominio è verificata la (4), i due integrali della forma bilineare (5) estesa alle due superficie sono uguali". Nel teorema è contenuta una condizione perchè l'integrale di una forma bilineare esteso ad una superficie non dipenda dalla superficie, ma soltanto dal bordo, analoga alla nota condizione perchè l'integrale curvilineo di una forma lineare non dipenda dalla curva ma solo dagli estremi. Il teorema infatti equivale al seguente: "Se [in *n.d.c.*] un dominio, V, dell'S_3 euclideo le funzioni A, B, C sono continue e soddisfano alla (4), essendo generalmente continue le derivate che compaiono nella (4) ed in V limitate, l'integrale della forma bilineare (5), esteso ad una superficie aperta interna a V, non dipende dalla superficie, ma soltanto dal bordo". Passando all'S_n non è lecito estendere formalmente il risultato ottenuto, giacchè nell'S_n

una superficie chiusa non limita una porzione di spazio come una superficie dell'S_3. Sia S una superficie dell'S_n definita mediante le equazioni:

$$x_i = \varphi_i(P) \qquad \text{per } i = 1\ 2.....n \tag{6}$$

con $P(X, Y, Z)$ variabile su una superficie, Σ, dell'S_n, definita mediante due terne di equazioni del tipo:

$$X = X(u, v) \qquad Y = Y(u, v) \qquad Z = Z(u, v) \tag{7}$$

variando il punto (u, v) in due domini, D, D', tra le frontiere dei quali, per le (7) sussiste la corrispondenza che fa di Σ una superficie chiusa dell'S_3. Consideriamo l'integrale di una forma bilineare ad n variabili esteso alla superficie S, integrale definito dalla relazione:

$$\int_S \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\ dx_i\ dx_k = \int_{D+D'} \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} \frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(u, v)} du\ dv. \tag{8}$$

Le (6) sono funzioni di u e v mediante X, Y, Z, perciò è:

$$\frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(Y, Z)} \cdot \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(Z, X)} \cdot \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(X, Y)} \cdot \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)}$$

sostituendo le espressioni così ottenute nell'integrale del secondo membro della (8), si ottiene, come è facile verificare, l'integrale della forma bilineare:

$$\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} \frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(Y, Z)} dY\ dZ + \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} \frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(Z, X)} dZ\ dX + \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} \frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(X, Y)} dX\ dY$$

esteso alla superficie Σ dell'S_3, di cui S rappresenta un modello nell'S_n. Si ha cioè

$$\int_S \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\ dx_i\ dx_k =$$

$$\sum_{i,k=1}^{n} \int_\Sigma \left(A_{ik} \frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(Y, Z)} dY\ dZ + A_{ik} \frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(Z, X)} dZ\ dX + A_{ik} \frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(X, Y)} dX\ dY \right).$$

Le condizioni di annullamento dell'integrale a primo membro si riportano quindi alle condizioni di annullamento dell'integrale a secondo membro, condizioni che facilmente si deducono dal risultato precedentemente ottenuto nell'S_3. La condizione (4), quando in luogo della (5), si consideri la (9), diventa:

$$\frac{\partial}{\partial X}\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(Y, Z)} + \frac{\partial}{\partial Y}\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(Z, X)} + \frac{\partial}{\partial Z}\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(X, Y)} = 0.$$

Eseguendo le derivate con la regola delle funzioni composte e tenendo conto dell'identità elementare:

$$\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(Y, Z)} + \frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(Z, X)} + \frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(X, Y)} = 0$$

si ha:

$$\sum_{i,k,l=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l}\frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(Y, Z)}\frac{\partial x_l}{\partial X} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l}\cdot\frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(Z, X)}\cdot\frac{\partial x_l}{\partial Y} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l}\frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(X, Y)}\frac{\partial x_l}{\partial Z}\right) = 0.$$

Condizione questa che, come si vede, si riduce alla seguente:

$$\sum_{i,k,l=1}^{n}\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l}\frac{\partial(x_i, x_k, x_l)}{\partial(X, Y, Z)} = 0$$

la sommatoria essendo estesa alle disposizioni senza ripetizioni a tre a tre dei, numeri $1, 2, \ldots.., n$. Tenendo conto che, permutando tra loro gli indici i, k, l, il determinante funzionale cambia soltanto di segno e che anche A_{ik} cambia di segno permutandone gli indici, si vede facilmente che la condizione si riduce alla seguente:

$$\sum_{i,k,l=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial A_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{li}}{\partial x_k}\right)\frac{\partial(x_i, x_k, x_l)}{\partial(X, Y, Z)}$$

dove la sommatoria è estesa alle combinazioni a tre a tre senza ripetizioni degli indici $1, 2, \ldots n$. Se ora prendiamo tutte le x_i costanti, ad eccezione di tre sole, concludiamo che, per tutte le superficie, per le quali le tre coordinate sono variabili, la condizione perchè si annulli l'integrale della forma bilineare è:

$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial A_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{li}}{\partial x_k} = 0. \tag{10}$$

Queste relazioni, ripetute per tutte le terne, (combinazioni semplici) di variabili, costituiscono la condizione necessaria e sufficiente (localmente) perchè si annulli l'integrale esteso ad una superficie chiusa. Abbiamo detto che la condizione è anche localmente sufficiente, supposta cioè verificata la condizione, in una regione sufficientemente [piccola *n.d.c.*], dove le funzioni A_{ik} sono continue e dotate di derivate continue, l'integrale è nullo. La condizione diventa sufficiente in grande quando al variare di (X, Y, Z) su Σ il punto $(x_1, x_2, ..., x_n)$ non esce da un campo in cui le funzioni sono dotate di derivate generalmente continue e limitate, cioè quando la superficie S è il contorno di una varietà a tre dimensioni tutta interna al campo dove le funzioni A_{ik} soddisfano alle suddette proprietà. Quando una superficie chiusa, S, si trova in tali condizioni rispetto alla forma bilineare si dice che è omologa a zero e si indica col simbolo: $S \sim 0$. Dunque si può enunciare il teorema: "Le (10), verificate per tutte le terne di variabili, sono condizioni necessarie e sufficienti per l'annullarsi dell'integrale della forma bilineare $\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\, dx_i\, dx_k$ esteso ad una superficie chiusa dell'S_n, quando la superficie chiusa è omologa a zero". Di qui si può ricavare la condizione perchè l'integrale di una forma bilineare esteso ad una superficie aperta non dipenda dalla superficie stessa ma soltanto dal contorno. Consideriamo due superficie, S', S'', aventi lo stesso contorno. Rappresentiamole sopra un certo dominio del piano in modo che tra i contorni vi sia corrispondenza biunivoca con conservazione del verso del percorso. È evidente che si ottiene una superficie chiusa, S, ponendo $S = S' - S''$, e quindi è:

$$\int_{S'} \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\, dx_i\, dx_k = \int_{S''} \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

quando è $S \sim 0$ cioè $S' - S'' \sim 0$ ciò che si indica anche col simbolo $S' \sim S''$. Si possono considerare superficie chiuse costituite da più superficie aperte. La condizione per l'annullamento dell'integrale è che risulti omologa a zero tale superficie complessa. Naturalmente, messi su questa via, acquistano significato anche i simboli $2S \sim 0$, $nS \sim 0$ con n intero. E più in generale simboli del tipo $nS+mS'+qS'' \sim 0$, che esprimono relazioni di carattere gruppale e commutativo. Si noti che, in generale, dalla relazione $nS \sim 0$ non è lecito dedurre $S \sim 0$. Se una superficie, S, è tale che risulti $2S \sim 0$, mentre non è $S \sim 0$ si dice che è divisore dello zero. Comunemente, da un punto di vista intuitivo, si descrive come omologa a zero una superficie che si può ridurre ad un punto o ad una curva senza abbandonare il campo dove sono verificate le condizioni d'integrabilità della forma. Avvertiamo infine che abbiamo preso in considerazione soltanto le superficie, perchè sono le varietà che ci interessano per lo scopo prefissoci, ma nozioni analoghe a quelle date nel presente capitolo si possono avere partendo da altre varietà. Ritorniamo ora alle funzioni analitiche per definire cosa debba intendersi per integrale di una funzione di due variabili complesse [esteso *n.d.c.*] ad una superficie S. Prendiamo in considerazione una funzione di due variabili complesse:

$$f(z_1, z_2) = u(x_1, y_1, x_2, y_2) + iv(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

si ha:

$$f(z_1, z_2)dz_1\ dz_2 = (u + iv)(dx_1 + idy_1)(dx_2 + idy_2) = u(dx_1\ dx_2 - dy_1\ dy_2) +$$

$$-v(dx_1\ dy_1 + dx_2\ dy_2) + i\left\{v(dx_1\ dx_2 - dy_1\ dy_2) + u(dx_1\ dy_2 + dx_2\ dy_1)\right\}.$$

Poniamo allora per definizione:

$$\begin{aligned}\int_S f(z_1, z_2)dz_1\ dz_2 = \int_S \{u(dx_1\ dx_2 - dy_1\ dy_2) - v(dx_1\ dy_2 + dx_2\ dy_1)\}\\ + i\int_S \{v(dx_1\ dx_2 - dy_1\ dy_2) + u(dx_1\ dy_2 + dx_2\ dy_1)\}. \qquad (11)\end{aligned}$$

In tal modo l'integrale di una funzione di due variabili complesse, esteso ad una superficie S, chiusa o aperta, dell'S_4, si pone uguale ad un numero complesso, di cui la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario sono due integrali di forme bilineari estesi alla superficie. Determiniamo le condizioni perchè sia nullo l'integrale di una funzione di due variabili complesse esteso ad una superficie chiusa, oppure, ciò che è lo stesso, perchè l'integrale, esteso nella superficie aperta non dipenda dalla superficie, ma soltanto dal contorno. Dalla definizione si deduce che perchè sia nullo l'integrale esteso ad una superficie chiusa S occorre e basta che siano nulli entrambi gli integrali di forme bilineari estesi ad S, che formano il secondo membro della (11). Poniamo per semplicità:

$$x_1 = t_1; \qquad y_1 = t_2; \qquad x_2 = t_3; \qquad y_2 = t_4; \qquad (12)$$

la forma bilineare sotto il segno del primo integrale si scrive:

$$u\,dt_1\,dt_3 - v\,dt_1\,dt_4 - v\,dt_2\,dt_3 - u\,dt_2\,dt_4,$$

quindi, riferendosi ai simboli usati precedentemente è:

$$A_{12} = 0;\ A_{13} = \frac{1}{2}u;\ A_{14} = -\frac{1}{2}v;\ A_{23} = -\frac{1}{2}v;\ A_{24} = -\frac{1}{2}u;\ A_{34} = 0.$$

Le condizioni (10), per $n = 4$, sono 4, cioè quante sono le combinazioni semplici dei quattro indici $1, 2, 3, 4$, a tre a tre. Esse sono precisamente:

$$\frac{\partial v}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t_4} + \frac{\partial v}{\partial t_3} = 0 \quad -\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial v}{\partial t_2} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial t_4} - \frac{\partial u}{\partial t_3} = 0$$

le quali, tenendo conto delle (12) si riducono alle seguenti:

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial y_1} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y_2} + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0 \quad -\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial y_1} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial y_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$$

che sono le condizioni di analiticità. Allo stesso risultato si perviene se si ricerca la forma che assumono le (10) relativamente alla forma bilineare che compare nel secondo integrale al secondo membro della (11). In definitiva, perchè la superficie S sia omologa a zero relativamente alle due forme bilineari in questione occorre e basta che lo sia relativamente alla funzione analitica $f(z_1, z_2)$ e cioè che sia il contorno di una varietà a tre dimensioni tutta interna al campo di analiticità di questa funzione. Si deduce allora il teorema di Cauchy-Poincaré: "condizione perchè l'integrale di una funzione analitica esteso ad una superficie chiusa sia nullo è che la superficie sia omologa a zero, sia cioè il contorno di una varietà a tre dimensioni interna al campo di analiticità della funzione". Questo teorema è l'estensione del teorema fondamentale di Cauchy per le funzioni olomorfe. Prendiamo in considerazione una superficie della quale già abbiamo parlato precedentemente. Consideriamo cioè la curva, C_1 nel piano delle z_1 e C_2 nel piano delle z_2, e diciamo C_1C_2 la superficie costituita dall'insieme prodotto dei due insiemi C_1 e C_2, superficie che, come abbiamo visto, è equivalente al toro. Orbene l'integrale esteso ad una tale superficie equivale a due integrali euclidei successivi, estesi alle due curve chiuse. Si ha cioè, come è facile verificare:

$$\int_{C_1C_2} f(z_1, z_2)dz_1\, dz_2 = \int_{C_1} dz_1 \int_{C_2} f(z_1, z_2)dz_2. \tag{13}$$

Ora teniamo presente che il campo di analiticità di $f(z_1, z_2)$ è un campo prodotto di un campo A_1 del piano z_1 e di un campo A_2 del piano z_2. La funzione $f(z_1, z_2)$ è analitica in A se risulta analitica rispetto a z_1 in A_1 e rispetto a z_2 in A_2. Di modo che, affinchè la superficie C_1C_2 sia omologa a zero, occorre e basta che C_1 sia il contorno di un dominio tutto interno ad A_2. La (13) mostra allora che il teorema di Cauchy-Poincaré applicato alla superficie chiusa C_1C_2 non ci apprende niente di nuovo, giacchè anche prescindendo da questo teorema, l'integrale esteso alla superficie C_1C_2, se essa è omologa a zero, è nullo, essendo nullo l'integrale curvilineo esteso a C_2 che compare nel secondo membro della (13), in virtù del teorema fondamentale di Cauchy relativo alle funzioni di una sola variabile complessa. Anzi possiamo dire addirittura che è nullo l'integrale esteso ad una superficie aperta costituita dall'insieme prodotto di una curva chiusa, C, in uno dei piani delle z_1 o delle z_2, e di un arco, L, di curva semplice nell'altro piano, qualora la curva C sia la frontiera di un dominio tutto interno al campo di analiticità di $f(z_1, z_2)$ nel primo piano. Si ha infatti, nell'ipotesi che C sia nel piano delle z_2 ed L nel piano delle z_1:

$$\int_{LC} f(z_1, z_2)dz_2\, dz_1 = \int_{L} dz_1 \int_{C} f(z_1, z_2)dz_2.$$

OSSERVAZIONE:

Diciamo S una superficie chiusa S già precedentemente esaminata e che abbiamo visto essere equivalente ad un cilindro chiuso ossia, volendo conservare l'immagine già adottata, ad una botte completa dei due fondi. Una tale superficie si ottiene sommando alla superficie aperta LC di cui sopra, che è equivalente al cilindro aperto, alla botte senza fondi, i due insiemi che sono equivalenti ai fondi, ossia i due insiemi di punti $(\bar{z}_1, z_2)$ essendo $\bar{z}_1$ uno degli estremi di L e z_2 variabile in tutto il dominio limitato racchiuso da C. Siccome su ciascuna di queste superficie aperte che si aggiungono ad LC è costante z_1 si ha: $dz_1 = 0$

per cui è:

$$\int_S f(z_1, z_2)dz_1\, dz_2 = \int_{LC} f(z_1, z_2)dz_1\, dz_2 = \int_L dz_1 \int_C f(z_1, z_2)dz_2. \tag{14}$$

Naturalmente se L si prende nel piano z_2 e C nel piano z_1 si ha la stessa relazione dove però nel terzo membro della (14) si scambia dz_1 con dz_2. Quest'ultima osservazione ci è utile per estendere alle funzioni di due variabili il teorema di Morera: "Se l'integrale di una funzione di due variabili complesse, continua in un campo A esteso ad una qualsiasi superficie chiusa omologa a zero, cioè contorno di una varietà a tre dimensioni tutta interna ad A, è nullo, la funzione è analitica in A". Indichiamo rispettivamente con A_1 ed A_2 i due campi dei piani z_1 e z_2, il cui prodotto da il campo A dello spazio a quattro dimensioni. Supposto verificata l'ipotesi del teorema, prendiamo in considerazione la superficie chiusa S di cui nell'osservazione precedente.

Qualunque sia una tale superficie, purchè omologa a zero, ossia purchè L sia in A_1, e C_2 sia il contorno di un dominio connesso tutto interno ad A_2, si ha, in virtù della ipotesi:

$$\int_S f(z_1, z_2)dz_1\, dz_2 = 0$$

e quindi, per la (14): $\int_L dz_1 \int_C f(z_1, z_2)dz_2 = 0$: Fissata C in A_2 questa relazione sussiste qualunque sia L in A_1 quindi è:

$$\int_C f(z_1, z_2)dz_2 = 0$$

e cioè comunque si fissi C in A_2 in modo che il dominio limitato che essa racchiude sia interno ad A_2. Dunque, in virtù del teorema di Morera per le funzioni di una variabile complessa la funzione $f(z_1, z_2)$ è analitica in A_2 rispetto a z_2. Considerando invece le superficie S che si ottengono prendendo L in A_2 e C in A_1 si deduce ancora che la funzione $f(z_1, z_2)$ è analitica in A_1 rispetto a z_1, donde si conclude che la funzione $f(z_1, z_2)$ è analitica nel campo A.

PARTE III - PUNTI ALL'INFINITO

Ci proponiamo di esporre i metodi escogitati per introdurre nello spazio delle n variabili complesse $(z_1, z_2, ..., z_n)$ i punti all'infinito e per definire una funzione analitica in tali punti. Ricordiamo come si procede, nel caso delle funzioni di una variabile, per definire l'olomorfia all'infinito. Il piano complesso, a differenza del piano proiettivo, si suppone dotato di un sol punto all'infinito. Si fa cioè l'ipotesi che il punto z tenda ad un'unica posizione limite comunque $|z|$ tenda all'infinito. L'immagine topologica del piano complesso è la sfera, sulla quale un punto, polo della proiezione stereografica, corrisponde al punto all'infinito del piano. Per definire il comportamento all'infinito di una funzione $f(z)$ si considera la trasformazione:

$$z' = \frac{1}{z} \tag{1}$$

mediante la quale $f(z)$ si trasforma in una funzione, $\varphi(z')$, della variabile z'. Si ha inoltre:

$$\lim_{|z| \to \infty} |z'| = 0.$$

Se la funzione $\varphi(z')$ risulta olomorfa e limitata nell'intorno dell'origine si dice che f(z) è olomorfa all'infinito e come valore all'infinito le si attribuisce il valore di $\varphi(z')$ nell'origine[(1')]. Sinteticamente si può dire che il carattere olomorfo all'infinito viene definito come invariante rispetto alla trasformazione (1), nel senso che la funzione, mediante la (1) si trasforma in una funzione olomorfa all'infinito. In luogo della trasformazione (1) si può prendere in

---

(1') Si tenga presente qui il teorema di Riemann, diciamo che una funzione $F(z)$, [ove *n.d.c.*] con z indichiamo una o più variabile complessa, è olomorfa nell'intorno di un punto z, se tale è in un intorno del punto, privato del punto stesso. Il teorema di Riemann per le funzioni di una variabile è il seguente: "Se una funzione $f(z)$ è olomorfa e limitata in un intorno del punto z^0, privato del punto stesso, e olomorfa in tutto l'intorno, nel senso che esiste il limite di $f(z)$ per z tendente a z^0 tale limite può assumersi come valore di $f(z)$ in z^0 risultando la funzione così prolungata olomorfa". Il teorema sussiste anche per le funzioni di più variabili.

considerazione la più generale sostituzione lineare:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \tag{2}$$

e definire l'olomorfia all'infinito mediante l'invarianza rispetto alla (2). Avvertiamo subito che la maggiore generalità che offre questa definizione rispetto alla prima, che si riferisce alla particolare sostituzione (1) è soltanto apparente. Tuttavia questa nuova definizione si presta ad un'interpretazione geometrica. Si può considerare z come l'ascissa di un punto variabile nella retta proiettiva complessa. Mediante il noto metodo delle coordinate proiettive omogenee (z, z_1) si introduce nella retta il punto all'infinito $(z, 0)$. La (2) è l'equazione della proiettività sulla retta. Essa, in coordinate omogenee equivale alle due equazioni:

$$z'_0 = az_0 + bz_1 \qquad z'_1 = cz_0 + dz_1$$

geometricamente il risultato precedente equivale a dire che l'olomorfia all'infinito di una funzione $f(z)$ si riguarda come invariante rispetto alle proiettività sulla retta proiettiva complessa. Nel cercare di estendere le precedenti considerazioni alle funzioni di più variabili si vede subito che si possono seguire varie vie. Ci si può riferire alle trasformazioni applicate o separatamente alle singole variabili o al complesso delle variabili come coordinate proiettive dello spazio proiettivo complesso ad n dimensioni. Si hanno così due punti di vista: quello dell'analisi e quello della geometria, ciascuno dei quali porta ad un risultato logicamente accettabile. Esaminiamo separatamente. **Punto di vista dell'analisi**: questo punto di vista risale a Weierstrass e da luogo al seguente metodo di introdurre i punti all'infinito dello spazio delle n variabili complesse. Limitandoci per ora al caso di due variabili, consideriamo le due trasformazioni:

$$z'_1 = \frac{1}{z_1}; \qquad z'_2 = \frac{1}{z_2}. \tag{3}$$

Indichiamo con $\varphi_1(z'_1, z_2)$ la trasformata della funzione analitica $f(z_1, z_2)$ per effetto della prima delle (3). Se tale funzione nello intorno del punto $(0, z_2)$ è analitica e limitata diremo che la funzione $f(z_1, z_2)$ è analitica nel punto all'infinito (∞, z_2). Analogamente detta

$\varphi_2(z_1, z_2')$ la funzione trasformata della $f(z_1, z_2)$ mediante la seconda delle (3), chiameremo analitica la funzione $f(z_1, z_2)$ nel punto all'infinito (z_1, ∞), se la funzione $\varphi_2(z_1, z_2')$ è analitica e limitata nell'intorno del punto $(z_1, 0)$. Infine indichiamo con $\varphi(z_1', z_2')$ la funzione nella quale si trasforma la $f(z_1, z_2)$ quando si applicano entrambe le (3). Se tale funzione è analitica e limitata nell'intorno dell'origine $(0, 0)$ si dirà che la $f(z_1, z_2)$ è analitica nel punto all'infinito (∞, ∞). Così operando si definiscono infinite posizioni limiti del punto $(z_1; z_2)$, che si ottengono quando $|z_1|$ o $|z_2|$ tendono ad un limite, uno almeno dei quali è infinito. Più precisamente, quando si considera $|z_1| \to \infty$ e z_2 variabile nel proprio piano si viene a definire un piano di punti impropri, al quale naturalmente appartiene il punto posizione limite per $|z_2| \to \infty$, cioè il punto (∞, ∞). Tale piano ha per immagine topologica una sfera sulla quale un punto, che chiameremo polo corrisponde al punto improprio suddetto (∞, ∞). Analogamente si ha un altro piano di punti impropri per $|z_2| \to \infty$. A tale piano appartiene ancora il punto (∞, ∞). In definitiva i punti all'infinito costituiscono due piani, un insieme topologicamente equivalente a due sfere con punto comune. Tale insieme chiude lo spazio S_4 delle due variabili complesse (z_1, z_2); da questo punto di vista questo spazio chiuso all'infinito, differisce dall'S_4 proiettivo, che all'infinito è chiuso da un S_3. Le definizioni di punto all'infinito e di analiticità della funzione in tale punto si può [possono *sic*] opportunamente compendiare dicendo che per una funzione $f(z_1, z_2)$ l'analiticità nell'insieme dei punti all'infinito dello spazio S_4 delle due variabili complesse (z_1, z_2) si riguarda come invariante rispetto alle due trasformazioni definite dalle (3), sia insieme che separatamente applicate. Anche qui, invece delle (3), si possono prendere in considerazione le più generali sostituzioni lineari rispetto alle singole variabili:

$$z_1' = \frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1} \qquad z_2' = \frac{a_2 z_2 + b_2}{c_2 z_2 + d_2}$$

ma, ancora una volta, la maggiore generalità è soltanto formale. Come si vede z_1 e z_2 vengono considerate separatamente su due rette proiettive complesse, in ciascuna delle quali, mediante le coordinate omogenee, sia stato introdotto il punto all'infinito. Un metodo più moderno per introdurre i punti all'infinito nello spazio delle due variabili complesse si ha considerando le due variabili come coordinate correnti del piano complesso proiettivo. Tale metodo deriva dal: **punto di vista della geometria**: consideriamo dunque z_1 e z_2

come le coordinate di un punto del piano proiettivo complesso. Mediante le coordinate omogenee (z_0, z_1, z_2) introduciamo nel piano i punti all'infinito, che si definiscono come i punti la cui prima coordinata, z_0, è nulla. Si tenga presente che le coordinate omogenee sono determinate a meno di un fattore di proporzionalità e che le coordinate non omogenee corrispondenti sono: $(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})$ consideriamo le trasformazioni omografiche del piano siffatto, trasformazioni definite dalle equazioni in coordinate non omogenee:

$$z_1' = \frac{a_{10} + a_{11}z_1 + a_{12}z_2}{a_{00} + a_{01}z_1 + a_{02}z_2} \qquad z_2' = \frac{a_{20} + a_{21}z_1 + a_{22}z_2}{a_{00} + a_{01}z_1 + a_{02}z_2} \tag{5}$$

equazioni che, in coordinate omogenee, equivalgono alle tre seguenti:

$$z_i' = a_{i0}z_0 + a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 \text{ per } i = 0, 1, 2 \tag{6}$$

diremo allora che la funzione $f(z_1, z_2)$ è analitica anche nei punti all'infinito se la sua analiticità è invariante rispetto alle omografie del piano proiettivo complesso. In altri termini, applicando le (5) la $f(z_1, z_2)$ si trasforma in una funzione $g(z_1', z_2')$ che deve essere analitica. Più precisamente dovrebbe dirsi: la funzione $f(z_1, z_2)$, con l'introduzione delle coordinate omogenee si trasforma in una funzione $F(z_0, z_1, z_2)$. Applicando le (6) questa si trasforma in un'altra $G(z_0', z_2', z_2')$, cui corrisponde $g(z_1', z_2')$ mentre i punti (z_0, z_1, z_2) si trasformano nei punti $(1, z_1', z_2')$ nei quali la funzione $g(z_1', z_2')$ risulta analitica. I punti all'infinito del piano proiettivo complesso sono una semplice infinità complessa, insieme topologicamente equivalente ad una sfera. Ne segue che i punti all'infinito dello spazio reale S_4 delle due variabili complesse sono una doppia infinità. Lo spazio delle due variabili complesse, al metodo testè esposto, viene dunque chiuso da un piano-sfera e differisce perciò dall'S_4 proiettivo che è chiuso da un S_3. Un'illustrazione intuitiva di ciò si ha dalle seguenti considerazioni, alle quali ora accenniamo, riservandoci di ritornarci su. Nello spazio a quattro dimensioni da noi preso in considerazione i piani sono dati da una equazione del tipo $az_1 + bz_2 + c = 0$ o dalle due reali che se ne ricavano. Tali piani non costituiscono tutti i piani dell'S_4, non potendo variare indipendentemente i coefficienti delle quattro variabili. Sono dunque dei piani speciali, che vengono chiamati piani caratteristici. Quindi: nello spazio a quattro dimensioni delle due variabili complesse v'è una doppia infinità complessa di piani caratteristici dell'S_4. Ognuno di essi ha una retta all'infinito dal punto di vista geometrico, un solo punto se ci poniamo dal punto di vista del piano complesso. Dunque: ∞^2 piani e perciò ∞^2 rette improprie, ciascuna delle quali si deve immaginare contratta in un punto solo, donde segue che si ha una doppia infinità di punti che costituiscono il piano-sfera dei punti all'infinito. Dalla esposizione fatta dei due metodi si vede la differenza dei risultati. I due punti di vista, quello dell'analisi e quello della geometria, i quali, nel caso di una sola variabile portano allo stesso risultato, nel caso di due variabili portano a risultati differenti. Il secondo metodo si estende naturalmente al caso di più variabili, considerando lo spazio proiettivo complesso ad n dimensioni, in esso si introducono i punti all'infinito mediante le coordinate omogenee $(z_0, z_1, ..., z_n)$ e postulando l'analiticità della funzione rispetto alle omografie di tale spazio, omografie le cui equazioni sono del tipo:

$$z'_k = \frac{\sum a_{ki}\ z_i}{\sum a_{0i}\ z_i} \quad \text{per } k = 1, 2, ..., n$$

ed equivalgono alle $n+1$ seguenti in coordinate non [*sic*] omogenee

$$z'_k = \sum_{i=0}^{n} a_{ki}\ z_i \quad \text{per } k = 0, 1, ..., n.$$

Se si vuole estendere il metodo derivante dal punto di vista dell'analisi bisogna considerare una sostituzione lineare per ogni variabile e poi supporre applicate tali sostituzioni sia separatamente che a due a due, a tre a tre ecc.

Il punto di vista geometrico è il più comodo e perciò ci atterremo ad esso. Intuitivamente, infatti, il punto di vista dell'analisi sembrerebbe meno artificioso e più conveniente. Con esso non si fa altro che considerare i due piani delle variabili complesse, ciascuno col proprio punto all'infinito, ed accoppiare ogni punto del piano della prima variabile con ciascun punto del piano della seconda, ottenendosi un punto all'infinito quando almeno uno dei due punti è all'infinito del proprio piano. Tenendo presente inoltre che un piano complesso si rappresenta su di una sfera, se ne deduce che i punti dello spazio a quattro dimensioni delle due variabili complesse trovano rappresentazione come una varietà, tutta al finito, semplice e regolare, cioè due sfere. Ad ogni punto del suddetto spazio a quattro dimensioni corrisponde una coppia di punti, di cui uno sulla prima sfera, l'altro sulla seconda.

L'introduzione dei punti all'infinito dal punto di vista della geometria sembra invece presentarsi come meno naturale e meno convincente. Ed infatti, mentre l'S_4 proiettivo ha all'infinito un S_3 nello spazio a quattro dimensioni delle due variabili complesse abbiamo sostituito l'S_3 con un piano-sfera, e non abbiamo ancora visto come lo spazio, così chiuso all'infinito, si possa riportare tutto al finito, si possa cioè rappresentare su di una varietà, semplice e regolare, tutta al finito. Ci proponiamo ora di occuparci precisamente di questo argomento, di far vedere cioè come lo spazio delle variabili complesse trova rappresentazione su di una varietà semplice e regolare, la quale si presenta come la più naturale estensione alle due variabili della sfera complessa sulla quale si rappresenta il piano di una variabile complessa. Teniamo presente che lo spazio a quattro dimensioni reali delle due variabili complesse corrisponde, nel modo precedentemente illustrato, al piano proiettivo complesso, nel quale le due variabili complesse sono le coordinate correnti non omogenee. Prendiamo in considerazione due piani proiettivi complessi. Indicheremo con z un punto del primo piano e con (z_0, z_1, z_2) le sue coordinate, mentre designeremo con z' un punto del secondo piano, nel quale (z'_0, z'_1, z'_2) sono le coordinate correnti. Dati due punti, z e z', facciamo tutti i nove prodotti che si possono effettuare tra una coordinata di z e una di z'. Poniamo quindi:

$$Z_{hk} = z_h \; z'_k \quad \text{per } h, k = 0, 1, 2. \tag{7}$$

Le nove quantità Z_{hk} sono, come le z_h e le z'_k, definite a meno di un fattore di proporzionalità. Esse perciò si possono interpretare come le coordinate di un punto, Z, dello spazio a otto dimensioni. Alla coppia di punti z e z' corrisponde dunque mediante le (7) un punto dell'S_8 proiettivo complesso. Al variare di z e z' rispettivamente nel proprio piano, il punto Z, descriverà nell'S_8 una varietà quadrimensionale, giacchè sia z che z' variano ciascuna su di un piano, cioè in un ente a due dimensioni complesse. Le (7) rappresentano pertanto una varietà V_4 a quattro dimensioni nell'S_8 proiettivo complesso. Essa chiamasi la "varietà di Segre". Esaminiamo qualche proprietà di questa V_4. Se nel primo piano complesso si fissa il punto (z_0, z_1, z_2) le (7) diventano equazioni lineari omogenee nelle z'_k e, come tali rappresentano un piano dell'S_8. Quindi ad ogni punto del primo piano corrisponde un piano sulla V_4. La varietà di Segre contiene allora una doppia infinità complessa di piani. Analogamente un'altra doppia infinità di piani della V_4 corrisponde alla doppia infinità di punti del secondo piano, ottenendosi un piano di questa seconda infinità fissando un punto z' nel secondo piano e facendo variare il punto z nel primo piano. Ognuno di questi sistemi ∞^1 di piani è una schiera, data la corrispondenza tra gli elementi del sistema e di punti di un piano. Dunque "la varietà di Segre contiene due schiere di piani". Due piani della stessa schiera non hanno punti comuni, mentre due piani appartenenti a schiere diverse hanno un sol punto in comune.[1'] Da questo punto di vista la varietà di Segre si presenta come una

---

[1'] Questa asserzione è di facile verifica: due piani della stessa schiera, per es. della prima, corrispondono a due punti distinti $\xi(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ $\eta(\eta_0, \eta_1, \eta_2)$ nel piano delle z. Le loro equazioni sono quindi $Z_{hk} = \xi_h\ z'_k$; $Z_{hk} = \eta_h\ z'_k$. Poichè due piani abbiano un punto comune dovranno esistere due sistemi di valori delle z'_k, cioè due punti del piano z', $\xi'(\xi'_0, \xi'_1, \xi'_2)$ $\eta'(\eta'_0, \eta'_1, \eta'_2)$ tali da risultare:

$$\xi_h\ \xi'_k = m\ \eta_h\ \eta'_k. \tag{8}$$

Nell'ipotesi che le η_h e ξ_h sono tutte non nulle, queste relazioni ci assicurano che anche le η'_k e ξ'_k devono essere non nulle. Inoltre è:

$$\xi'_k/\eta'_k = m\ \eta_h/\xi_h$$

e ciò per tutti i valori di h, k indipendentemente, cioè deve essere:

$$\frac{\xi'_k}{\eta'_k} = m\frac{\eta_0}{\xi_0} = m\frac{\eta_1}{\xi_1} = m\frac{\eta_2}{\xi_2}$$

ossia: $\eta_0 = a\xi_0$, $\eta_1 = a\xi_1$, $\eta_2 = a\xi_2$, ciò che è contro l'ipotesi che i punti ξ ed η siano distinti. Il risultato non cambia se una delle ξ_k o delle η_h è nulla. Le (8) infatti mostrano che qualora una delle η_h è nulla, tale deve risultare anche la corrispondente ξ_h e viceversa. Supposto $\eta_h = 0$ nelle (8) si hanno le relazioni $\xi_h\xi'_i = 0$ $i = 0, 1, 2$ le quali non potendo essere $\xi'_0 = \xi'_1 = \xi'_2 = 0$ importano $\xi_h = 0$. Due piani di diverse schiere corrispondono a due punti $\xi(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ $\eta'(\eta'_0, \eta'_1, \eta'_2)$ di piani differenti, ed hanno allora le equazioni $Z_{hk} = \xi_h z'_k$; $Z_{hk} = z_h\eta'_k$ e si vede subito che si può avere $\xi_h\ z'_k = z_h\ \eta'_k$ solo ponendo a meno di un fattore $z'_k = \eta'_k$ $z_h = \xi_h$ di modo che si ha l'unico punto comune di coordinate $Z_{hk} = \xi_h\ \eta'_k$.

estensione ben naturale delle quadriche dell'S_3.[(2')] Sia ora fissato il punto z ed il punto z' vari, invece che su tutto il piano, su di una retta di questo. In corrispondenza si avrà sulla V_4 una V_1, cioè una curva. Se z e z' descrivono ciascuno una retta al proprio piano, si avrà in corrispondenza sulla V_4 una V_2, cioè una quadrica. Ad ogni coppia di rette corrisponde dunque una quadrica. Essendo ∞^2 le rette di un piano le quadriche della V_4 sono ∞^4. "La varietà di Segre contiene una quadruplice infinità complessa di quadriche". Ricerchiamo ora l'ordine della V_4. Ricordiamo che se V_m, [è *n.d.c.*] ad m dimensioni nell'S_n, il suo ordine è dato dal numero delle sue intersezioni con una varietà lineare che abbia $n-m$ dimensioni. Pertanto l'ordine di una varietà quadrimensionale dell'S_8 è il numero delle sue intersezioni con una varietà lineare quadrimensionale. Una varietà lineare k-dimensionale nell'S_n si rappresenta mediante $n-k$ equazioni lineari. Nel nostro caso una varietà lineare quadrimensionale dell'S_8 si assegna mediante le quattro equazioni:

$$\sum_{k=0}^{8} a_{hk}\, Z_{hk} = 0 \quad \text{per } h = 0, 1, 2, 3. \tag{10}$$

Per calcolare l'ordine di una varietà è lecito, in virtù di un principio di geometria algebrica, detto "principio della conservazione dell'ordine", riferirci ad una varietà lineare di forma particolare, opportunamente scelta, ansichè ad una generica. Orbene noi ci riferiremo alle

---

[(2')] Siano date due rette proiettive complesse ed indichiamone rispettivamente con (z_0, z_1), (z'_0, z'_1) le coordinate correnti. Mediante le relazioni:

$$Z'_{hk} = z_h\, z'_k \quad \text{per } h, k = 0, 1 \tag{9}$$

ad ogni coppia di punti, presi uno sulla prima retta l'altro sulla seconda, corrisponde un punto Z dell'S_3. Le (9) sono dunque le equazioni di una varietà, V_2, bidimensionale dell'S_3. Fissati il punto (z_0, z_1) le (9) rappresentano una retta. Analogamente se si fissa il punto (z'_0, z'_1). Dunque la V_2 contiene due sistemi semplicemente infiniti di rette. Due rette si incontrano in un punto solo se appartengono a sistemi differenti. La varietà è dunque una quadrica ed i suddetti sistemi di rette sono il sistema delle direttrici ed il sistema delle generatrici.

varietà per le quali nelle equazioni (10) che la rappresentano, si ha: $a_{hk} = \alpha_h\ \alpha'_k$. Si tratta dunque di determinare il numero delle intersezioni della V_4 con:

$$\sum_{k=0}^{8} \alpha_h\ \alpha'_k\ Z_{hk} = 0 \quad h = 0, 1, 2, 3. \tag{11}$$

Il sistema da prendersi in considerazione è quello formato dalle equazioni (7) ed (11). Eliminando le Z_{hk} si ha $\sum_k \alpha_h \alpha'_k z_h z'_k = 0$ ossia: $\alpha_h z_h \sum_k \alpha'_k z'_k = 0$. Si hanno quattro equazioni, ciascuna delle quali ha a primo membro il prodotto di due fattori. Ad ogni equazione si può pertanto soddisfare annullando l'uno o l'altro dei due fattori. Le z_h sono tre ma compaiono in forma omogenea, quindi per determinare un sistema delle z_h occorrono due equazioni. Analogamente occorrono due equazioni lineari per determinare, sempre a meno di un fattore, un sistema di z'_k. Ne segue che per risolvere il suddetto sistema di equazioni lineari nelle z_h, z'_k si annullano in due equazioni i fattori contenenti le z_h e nelle altre due i fattori nelle z'_k, ottenendosi in tal modo due sistemi di equazioni lineari, in tre incognite, le quali risultano in tal modo determinate a meno di un fattore di proporzionalità. Si hanno allora tante soluzioni quante sono le combinazioni delle quattro equazioni a due a due. Dunque: "la varietà di Segre è di ordine sei". Riassumendo: "la varietà di Segre è una varietà quadrimensionale, di ordine sei, nell'S_8 proiettivo complesso, contenente due schiere di piani complessi, tali che due piani si incontrano in un punto soltanto se non appartengono alla stessa schiera, contenente inoltre un sistema ∞^4 di quadriche". I punti di tale varietà sono in corrispondenza biunivoca con le coppie di punti di due piani proiettivi complessi, corrispondenza che ne subordina altre tre, due tra i piani delle due sudette schiere ed i punti dei due piani proiettivi, la terza tra le ∞^4 quadriche della varietà e le coppie di rette dei due piani. Evidentemente nella corrispondenza tra i punti della varietà di Segre e le coppie dei punti dei due piani proiettivi nulla vieta che i due piani siano sovrapposti. Si può parlare cioè di corrispondenza tra i punti della V_4 e le coppie dei punti di un piano proiettivo complesso. Vediamo ora quali sono i punti della varietà di Segre che corrispondono ad alcune particolari coppie di punti dei due piani, sovrapposti o no; cioè alle coppie che si ottengono associando ad ogni punto del piano z il punto del piano z' che ha per coordinate i complessi coniugati delle coordinate del punto di

z. Basta porre nelle (7) $z'_h = \bar{z}_h$. Si ottiene allora che le coordinate dei punti corrispondenti sulla varietà di Segre alle suddette coppie di punti sono: $Z_{hk} = z_h\,\bar{z}_k$ ovverosia $Z_{hk} = \bar{Z}_{kh}$. Dunque: "ad ogni coppia di punti coniugati corrisponde sulla varietà di Segre un punto le cui coordinate sono a due a due coniugate, risultando naturalmente autoconiugate, e perciò reali, le coordinate ad indici uguali". Viceversa dato sulla varietà di Segre un punto le cui coordinate ad indici distinti sono a due a due coniugate, mentre sono reali le corrispondenti coordinate ad indici uguali, a tale punto corrisponde una coppia di punti coniugati.$^{(1')}$

[$^{(1')}$ La verità di tale affermazione risulta senz'altro dalla verità dell'inverso e dal fatto che la corrispondenza che sussiste tra i punti delle varietà e le coppie dei punti è biunivoca. Tuttavia si può anche dimostrarla direttamente. Siano:

$$Z_{hk} = z_h\, z'_k \tag{12}$$

le coordinate di un punto della varietà V_4 e supponiamo che sia:

$$\bar{Z}_{hk} = Z_{kh} \quad Z_{hh} = \text{numero reale} \tag{13}$$

dobbiamo far vedere che deve essere:

$$z_h = \bar{z}'_h \quad \text{per } h = 0, 1, 2. \tag{14}$$

Poniamo: $z_h = x_h + iy_h, z'_k = x'_k + iy'_k$. Le seconde delle (13) importano che risultino reali i numeri $(x_h + iy_h)(x'_h + iy'_h)$ per $h = 0, 1, 2$. Ciò equivale a dire che risultano nulli i coefficienti dell'immaginario $x_h y'_h + x'_h y_h = 0$, da cui deduciamo che deve essere: $x'_h = A_h x_h$, $y'_h = -A_h y_h$. Trattandosi di coordinate omogenee, le (14) risultano verificate se è $A_0 = A_1 = A_2$. Per due distinti valori si ha:

$$\begin{aligned} Z_{hk} &= z_h z'_k = A_k\Big[(x_h x_k + y_h y_k) + i(x_k y_h - x_h y_k)\Big]; \\ Z_{kh} &= z_k z'_h = A_h\Big[(x_k x_h + y_k y_h) + i(x_h y_k - x_k y_h)\Big] \end{aligned} \tag{15}$$

e dovendo risultare $Z_{hk} = \bar{Z}_{kh}$ come richiedono le prime delle (12) ciò si può ottenere soltanto se è: $A_k = A_h$.]

Da queste corrispondenze se ne deduce un'altra mediante un opportuno cambiamento immaginario di coordinate. Prendiamo un punto avente le coordinate Z_{hk} a due a due coniugate e chiamiamo X_{hh} le coordinate autoconiugate, cioè reali poniamo cioè $Z_{hh} = X_{hh}$. Consideriamo inoltre le coppie di coordinate coniugate Z_{hk} e Z_{kh}. Per prendere tutte le coppie una sola volta basta evidentemente prendere tutte le Z_{hk} con $h < k$. Chiamiamo X_{hk} ed X_{kh} rispettivamente la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di Z_{hk}. Poniamo cioè:

$$X_{hk} = \frac{1}{2}\Big(Z_{hk} + Z_{kh}\Big) \ ; \ X_{kh} = \frac{1}{2i}\Big(Z_{hk} - Z_{kh}\Big) \ ; \ X_{hh} = Z_{hh} \ \ h,k = 0,1,2 \ \ h < k.$$

Si hanno così nove numeri reali, determinati a meno di un fattore, cioè le coordinate di un punto dell'S_8, il quale appartiene ancora alla varietà di Segre. In tal modo ad ogni coppia di punti coniugati z e $\bar{z}$ corrisponde un punto reale della varietà di Segre. Inversamente, [sia *n.d.c.*] dato un punto reale della varietà di Segre mediante le sue coordinate X_{hk} per $h,k = 0,1,2$. Operiamo il cambiamento immaginario di coordinate:

$Z_{hk} = X_{hk} + iX_{kh}$, $Z_{kh} = X_{hk} - iX_{kh}$, $Z_{hh} = X_{hh}$ per $h = k$. Si ha un punto della varietà di Segre, le cui coordinate ad indici diversi sono a due a due coniugate, mentre sono reali quelle ad indici uguali. A tale punto corrisponde una coppia di punti coniugati. Pertanto ad ogni punto reale della varietà di Segre corrisponde una coppia di punti coniugati. In conclusione, riguardandosi due piani proiettivi complessi come coincidenti, riguardando cioè le (z_0, z_1, z) come le coordinate di un punto di un piano proiettivo complesso, e le $(\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ come coordinate di un altro punto dello stesso piano, punto che diremo coniugato al precedente il risultato ottenuto ci autorizza ad affermare: "tra i punti del piano proiettivo complesso ed i punti della varietà di Segre sussiste una corrispondenza biunivoca senza eccezioni". La varietà di Segre, con i suoi punti reali rappresenta per una coppia di variabili complesse ciò che la sfera, con i suoi punti reali rappresenta per una sola variabile complessa. Dal punto di vista geometrico si ha così la più naturale estensione della sfera complessa nel campo delle due variabili complesse. Perchè l'analogia appaia più evidente esaminiamo ancora la varietà di Segre con i suoi punti reali. Ricaviamo che, fissato un punto z e facendo variare z' si ottiene un piano della varietà di Segre, piano complesso, che contiene però il punto che corrisponde sulla varietà alla coppia di punti ottenuti quando z'

è il coniugato del fissato punto z. Esso è l'unico punto reale contenuto nel piano, giacchè ogni altro punto reale della varietà non può corrispondere allo stesso z. Analogamente se si fissa il punto z' e si fa variare z si ottiene sulla V_4 un piano, contenente un sol punto reale. Dunque per ogni punto reale della V_4 passano due piani complessi coniugati, aventi quel unico punto in comune. La varietà di Segre, con i suoi punti reali, risulta dunque come il luogo dei punti intersezioni dei piani di due schiere complesse. Essa perciò si presenta nell'S_8 come l'analoga delle quadriche ellittiche dell'S_3. Pertanto: la varietà di Segre, che si assume come immagine reale dei punti del piano proiettivo complesso è una varietà ellittica come lo è la sfera che si assume l'immagine reale dei punti della retta complessa. La varietà contiene inoltre un sistema di quadriche ellittiche, ognuna delle quali si ottiene facendo variare il punto z su di una retta ed il punto z' sulla retta coniugata. La sfera rappresentativa dei punti di una retta complessa è tutta al finito. Per mezzo di un'opportuna trasformazione omografica possiamo ridurre la varietà di Segre tutta al finito. In tal modo le quadriche ellittiche in essa contenute si trasformano tutte in ellissoidi. Per determinare una trasformazione omografica adatta allo scopo prefissoci ricordiamo quanto si fa per le curve nel piano. Per trasformare una curva piana avente punti all'infinito in un'altra tutta al finito si opera con una trasformazione omografica che trasforma in retta all'infinito una retta che non ha punti reali in comune con la curva. Analogamente, per trasformare una varietà dell'S_n in un'altra tutta al finito basta scegliere una trasformazione omografica che porta all'infinito un S_{n-1} che non ha punti comuni con la varietà. Venendo al nostro caso, la varietà di Segre si trasforma in una varietà tutta al finito mediante un S_7 dell'S_8 che non ha in comune con la varietà alcun punto reale. Consideriamo l'S_7 di equazione $\sum_{h,k=0}^{2} a_{hk} Z_{hk} = 0$ con $a_{hk} = \bar{a}_{kh}$ e determiniamo i coefficienti in modo che non vi siano intersezioni tra l'S_7 e la varietà di Segre reale, le cui equazioni sono $Z_{hk} = z_h \bar{z}_k$. Eliminiamo le Z_{hk}, si ha: $\sum_{h,k=0}^{2} a_{hk}\ z_h \bar{z}_k = 0$. Il primo membro di questa relazione è costituito da una forma hermitiana. Basta porre $a_{hk} = 0$ per $h \neq k$ e $a_{hk} = 1$ per $h = k$ perchè la forma diventi: $\sum_{h,k=0}^{2} z_h \bar{z}_k$ che è definita positiva e, come tale non nulla. Basta perciò prendere l'S_7 definito dalle equazioni:

$$\sum_{h=0}^{2} Z_{hk} = 0$$

come spazio limite dell'omografia perchè la V_4 reale si trasformi in una V_4 che non ha punti di intersezione con l'S_7 all'infinito. Otteniamo in tal modo una varietà tutta al finito, che rappresenta i punti del piano complesso proiettivo. Mostriamo ancora che la varietà di Segre è priva di punti singolari. Se applichiamo un'omografia al piano delle z ed un'altra al piano delle z', si otterrà nell'S_8 una trasformazione che trasforma la varietà di Segre in se stessa. Anzi è evidente che si possono scegliere le due omografie in modo da far corrispondere ad un dato punto un altro punto scelto ad arbitrio: Se poi consideriamo i soli punti reali della varietà, possiamo ottenere ugualmente una trasformazione della varietà reale in se stessa applicando alle z_k una trasformazione omografica ed alle z'_k la trasformazione coniugata. A z_k corrisponderà così il coniugato del trasformato di z_h. Ad un punto reale della V_4 corrisponde un punto egualmente reale e si vede subito che la trasformazione è, di conseguenza, la sua coniugata. [Le trasformazioni $n.d.c.$] possono essere scelte in modo da portare un determinato punto in un qualsiasi altro punto. Si tratta di trasformazioni della varietà di Segre in se stessa, trasformazioni, le quali, come le omografie piane, formano gruppo, risultando un gruppo transitivo. Potendosi trasformare un punto in un qualsiasi altro e non essendo, d'altra parte, possibile trasformare un punto singolare in un altro non singolare, ne segue che la varietà di Segre è priva di punti singolari. Esaminiamo un pò le trasformazioni che trasformano la varietà di Segre in se stessa. Come si è detto, alle trasformazioni proiettive nei due piani, delle z_h e delle z'_k corrispondono nell'S_8 trasformazioni proiettive che trasformano in se la varietà di Segre. Le trasformazioni che mutano la varietà reale in se si ottengono assoggettando i punti z del primo piano ad un'omografia ed i punti z' del secondo piano alla omografia coniugata. I parametri, cioè i coefficienti, di una omografia sono nove, ma intervengono in forma omogenea, perciò sono otto non omogenei, e, di conseguenza, sedici reali. Si hanno pertanto ∞^{16} trasformazioni che mutano la varietà di Segre in se stessa e che corrispondono alle trasformazioni proiettive nel piano proiettivo complesso. Si tratta dunque proprio di quelle trasformazioni del piano delle due variabili complesse, rispetto alle quali abbiamo postulato la invarianza dell'analiticità delle funzioni quando abbiamo introdotto i punti all'infinito. La varietà di Segre contiene due schiere complesse di piani. Un piano della prima schiera si ottiene fissando le z_h e facendo variare le z'_k nel proprio piano, un piano della seconda schiera si ottiene facendo variare soltanto le

z_h. Le trasformazioni suddette sono tali da trasformare ogni piano di una delle due schiere in un piano della stessa schiera. Esse infatti risultano dal prodotto di due omografie, una delle quali trasforma in se il piano delle z_h, l'altra trasforma in se il piano delle z'_k. Vi sono altre trasformazioni che mutano la varietà di Segre in se stessa. Si possono assoggettare le z_h ad un'omografia e le z'_k ad un'altra omografia, indi scambiare le variabili. Alle z'_k si fanno corrispondere altre variabili ξ'_k, analogamente le z_h si trasformano in altre nove variabili, indi si pone

$$\tau_k = \xi'_k \qquad \tau'_k = \xi_k.$$

Mediante trasformazioni di questa specie la varietà di Segre si muta in se stessa, ma è evidente che i piani della prima schiera si trasformano nei piani della seconda schiera e viceversa. Si hanno due tipi di trasformazioni della varietà di Segre in se stessa. Essi corrispondono ai due noti tipi di trasformazioni di una quadrica in se stessa: un primo tipo che trasforma ogni generatrice in una generatrice ed ogni direttrice in una direttrice, un secondo tipo che muta le generatrici in direttrici e viceversa. Se consideriamo soltanto la varietà di Segre reale, il primo tipo di trasformazione corrisponde alle trasformazioni che portano il piano in sè, il secondo tipo di trasformazioni corrisponde alle omografie che trasformano il piano in sè, indi scambiando ogni punto col proprio coniugato, una omografia cioè accompagnata da coniugio. La trasformazione che porta ogni punto del piano nel coniugato non è analitica. Si ricordi che nel caso di una sola variabile, ponendo $w = f(z)$ si definisce una trasformazione conforme diretta, mentre ponendo $w = f(\bar{z})$, si viene a definire una trasformazione conforme inversa, una trasformazione cioè che conserva gli angoli, ma non il verso. Sulla sfera complessa si hanno due tipi di trasformazioni, che mutano la sfera in sè, una trasformazione conforme che conserva il verso, ed una, che diciamo anticonforme, che non conserva il verso. Il primo tipo di trasformazione corrisponde alle proiettività del piano definite dall'equazione:

$$\zeta = \frac{az + b}{cz + d}$$

che si ottiene ponendo la nuova variabile come funzione razionale dell'antica. Il secondo tipo corrisponde all'antiproiettività cioè ad una proiettività ed un coniugio; si ha ponendo:

$$\zeta = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}.$$

In coordinate omogenee il primo tipo è definito dalle equazioni: $\xi_0 = cz_1 + dz_0$; $\xi_1 = az_1 + bz_0$; il secondo: $\xi_0 = c\bar{z}_1 + d\bar{z}_0$; $\xi_1 = a\bar{z}_1 + b\bar{z}_0$. Analogamente nel piano delle due variabili complesse si ha la proiettività rappresentata dalle equazioni $\xi_k = a_{k0}z_0 + a_{k1}z_1 + a_{k2}z_2$, per $k = 0, 1, 2$; e l'antiproiettività, prodotto di una proiettività e di un coniugio le cui equazioni sono: $\xi_k = a_{k0}\bar{z}_0 + a_{k1}\bar{z}_1 + a_{k2}\bar{z}_2$, per $k = 0, 1, 2$. Si hanno dunque due sistemi di trasformazioni, ciascuno ∞^{16}, alle quali corrispondono due sistemi ∞^{16} di trasformazioni della varietà di Segre in sè. Le trasformazioni del primo sistema sono tali da conservare l'analiticità delle funzioni. Vogliamo ora parlare di un modello di rappresentazione delle due variabili complesse per un verso più intuitivo del precedente, e per un altro verso, più astratto, tale però da non portarci fuori dall'S_4, a differenza del modello precedente che ci porta nell'S_8. Prendiamo in considerazione lo spazio a quattro dimensioni delle due variabili complesse, le cui coordinate correnti sono (x_1, y_1, x_2, y_2) che, qualche volta, indicheremo con (t_1, t_2, t_3, t_4). In tale spazio consideriamo l'equazione:

$$\lambda_1\, z_1 + \lambda_2\, z_2 + \mu = 0 \tag{16}$$

con λ_1, λ_2 e μ numeri complessi. Questa equazione, nel campo reale, equivale a due equazioni nelle variabili reali: x_1, y_1, x_2, y_2, e perciò rappresenta un piano dell'S_4. Anzi per λ_1, λ_2 e μ indeterminati, rappresenta tutti i piani dello spazio a quattro dimensioni delle due variabili complesse, ma non rappresenta tutti i piani dell'S_4 non essendo indipendenti i coefficienti delle variabili reali x_1, y_1, x_2, y_2. Tali piani, assegnati mediante una equazione complessa, si chiamano, come già più di una volta abbiamo detto, piani caratteristici dell'S_4. Ogni piano ha una retta all'infinito. Un piano caratteristico va assimilato ad un piano complesso ordinario e, come tale, possiede un solo punto all'infinito. Dunque la retta all'infinito di un piano caratteristico, cioè di un piano di equazioni complesse del tipo (16) va contratta in un punto. Consideriamo allora l'S_3 all'infinito dell'S_4 reale. Delle rette appartenenti a tale S_3 dobbiamo considerare soltanto quelle che appartengono ai piani caratteristici, ed ognuna di queste rette deve essere immaginata come contratta in un punto solo. Si ha così l'insieme dei punti all'infinito dello spazio a quattro dimensioni delle due variabili complesse z_1, z_2. Per caratterizzare meglio le rette reali all'infinito dell'S_4 appartenenti a piani caratteristici procediamo ancora nelle nostre considerazioni. Ricordiamo ancora una volta che non prendiamo in considerazione tutti i piani dell'S_4 reale, piani che si assegnano mediante due equazioni lineari nelle quattro variabili, bensì i soli piani caratteristici, le cui equazioni reali provengono da una equazione complessa. Di tali piani consideriamo soltanto i punti all'infinito, comuni a tutti i piani della stessa giacitura. Possiamo pertanto limitare le nostre considerazioni ai piani caratteristici passanti per l'origine. L'equazione:

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = 0 \tag{17}$$

rappresenta appunto tali piani. Dal punto di vista reale tale equazione non differisce dalla seguente:

$$\bar{\lambda}_1 \bar{z}_1 + \bar{\lambda}_2 \bar{z}_2 = 0 \tag{18}$$

dove, al solito, col soprasegno si indica il coniugato di un numero. Le due equazioni rappresentano allora lo stesso piano caratteristico dell'S_4 reale. Per comodità chiameremo ora t_1, t_2, t_3, t_4 le coordinate correnti dell'S_4 ponendo:

$$t_1 = x_1; \quad t_2 = y_1; \quad t_3 = x_2; \quad t_4 = y_2 \tag{19}$$

ed indichiamo con t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 le coordinate omogenee dell'S_4. Ciò posto, ricerchiamo i punti all'infinito, evidentemente non reali, comuni a tutti i piani caratteristici. Le coordinate di tali punti debbono soddisfare alla (17) oppure alla (18) comunque si prendono λ_1 e λ_2. Per soddisfare alla (17) comunque si prendano λ_1 e λ_2 dobbiamo porre $z_1 = z_2 = 0$ cioè, $x_1 + iy_1 = 0$ e $x_2 + iy_2 = 0$ e, per le (18) invece: $x_1 - iy_1 = 0$ e $x_2 - iy_2 = 0$. Questi due sistemi di equazioni con le posizioni (19) diventano

$$t_1 + it_2 = 0; \quad t_3 + it_4 = 0; \quad t_1 - it_2 = 0; \quad t_3 - it_4 = 0. \tag{20}$$

Se a ciascuno di questi sistemi si associa l'equazione:

$$t_0 = 0 \qquad [21]$$

si ottengono due sistemi lineari nelle coordinate omogenee dell'S_4 proiettivo reale. Ciascuno dei sistemi rappresenta nell'S_4 una retta, retta all'infinito ed immaginaria. Dunque: "i punti all'infinito dell'S_4 comuni a tutti i piani caratteristici formano due rette immaginarie". Tali rette sono sghembe e coniugate. Ogni piano dell'S_4 ha all'infinito una retta reale che si appoggia alle due rette immaginarie predette. Ne segue che le rette all'infinito dei piani caratteristici sono tutte le rette che si appoggiano alle due rette coniugate sghembe che sono comuni a tutti i piani. Le rette che si appoggiano a due rette sghembe immaginarie coniugate formano una congruenza ellittica. Per ogni punto passa una ed una sola retta di questa congruenza. Dall'S_3 all'infinito dell'S_4 si stacca dunque una congruenza ellittica di rette, le quali però non costituiscono ancora l'insieme dei punti all'infinito dello spazio delle due variabili complesse. Per ottenere quest'insieme occorre sostituire ad ogni retta della congruenza un punto solo. A ciascuno dei sistemi (20) si soddisfa ponendo: $t_1^2 = -t_2^2$; $t_3^2 = -t_4^2$, ossia $t_1^2 + t_2^2 = 0$; $t_3^2 + t_4^2 = 0$. I punti delle due rette sostegno della congruenza appartengono al luogo di equazioni: $t_1^2+t_2^2+t_3^2+t_4^2 = 0; t_0 = 0$, che è la sfera assoluta dell'S_4. Pertanto: "le due rette sghembe comuni a tutti i piani caratteristici dell'S_4 appartengono alla sfera assoluta dell'S_4". Ciò analogamente a quanto avviene nell'S_2 e nell'S_3. Nell'S_2 lo assoluto è formato dai due punti ciclici, intersezione di tutti i cerchi del piano. Nell'S_3 l'assoluto è un cerchio, luogo dei punti immaginari impropri comuni a tutte le sfere dello spazio. Nell'S_4 tutte le ipersfere hanno in comune punti allo infinito e immaginari formanti una sfera, la sfera assoluta. Tra i piani caratteristici e le rette sostegno della congruenza sussistono le seguenti relazioni: ogni piano ha due punti ciclici, uno su una delle rette l'altro sulla seconda retta. Le due rette sono il luogo dei punti ciclici dei piani caratteristici. I piani caratteristici sono i piani i cui punti sono sulle due rette. Ciò ci assicura che se un piano caratteristico lo facciamo variare nell'infinità a quattro dei piani caratteristici in modo da ritornare su se stesso i punti ciclici non si potranno mai scambiare tra di loro perchè appartengono a due rette sghembe. Questo fatto importa che, orientato il piano, l'orientazione si conserva quando il piano varia con continuità. Questa della conservazione del verso è una proprietà caratteristica degli spazi proiettivi complessi. Se si orienta una delle rette dell'S_2 reale e si fa variare con continuità, essa può cambiare verso; basta, per esempio, farla rotare di 180^o perchè ritorni su se stessa col verso cambiato. Ciò invece non avviene nell'S_2 complesso. Le rette del piano proiettivo complesso conservano l'orientazione. Tali rette, dal punto di vista reale, sono delle superficie (ellissoidi). Ad ogni retta del piano complesso corrisponde sulla varietà di Segre reale un ellissoide, che limita una porzione di spazio (non appartenente alla varietà). Un ellissoide ha due facce, l'interna e l'esterna, e non si può passare dall'una all'altra. La proprietà della conservazione del verso ci assicura che è possibile dare un'orientazione simultanea a tutte le rette complesse del piano proiettivo complesso in modo da rispettare la continuità. Ricordiamo la definizione proiettiva di angolo mediante il birapporto. Se a e b sono due rette del piano consideriamo con esse le due rette isotrope i_1, i_2 del piano uscenti dal punto di incontro. Con l'espressione (a, b, i_1, i_2) indichiamo al solito, il birapporto. Con l'espressione $\frac{1}{2i}\log(a, b, i_1, i_2)$ si definisce l'angolo proiettivo delle due rette, determinato in verso (col segno) ed in valore a meno di un multiplo di π. Quando il piano si muove rigidamente le due rette isotrope non si possono scambiare, quindi il birapporto non cambia e l'angolo resta lo stesso. Non si può far si che a venga in b e b in a. Come abbiamo parlato di piani caratteristici, si può anche parlare di superficie caratteristiche dell'S_4. Si chiama "superficie caratteristica dell'S_4" ogni superficie rappresentata da un legame analitico tra le due variabili complesse del tipo: $z_1 = \varphi(z_2)$ oppure $z_2 = \psi(z_1)$. Parleremo più avanti di superficie caratteristica di equazioni implicite $f(z_1, z_2) = 0$. Per tale argomento non possediamo ancora gli elementi che ci sono necessari. Le superficie caratteristiche godono della stessa proprietà dei piani caratteristici, cioè sono orientabili. Per orientare una superficie basta orientare il piano tangente. I piani tangenti ad una superficie caratteristica sono evidentemente piani caratteristici. Per ottenere il piano tangente in un punto alla superficie caratteristica di equazione

$$z_2 = \varphi(z_1) \tag{21}$$

basta evidentemente considerare z_1 e z_2 come variabili reali, la (21) come l'equazione di una curva e scrivere l'equazione della tangente a tale curva. Si ottiene così un legame analitico lineare tra z_1 e z_2, legame che rappresenta un piano caratteristico. Dunque, allo spazio a quattro dimensioni delle due variabili complesse, cioè nell'S_4 reale modificato all'infinito nel modo sufficientemente illustrato e rappresentabile biunivocamente sulla varietà di Segre, si può dare un'orientazione caratteristica che si ottiene orientando i piani caratteristici. La precedente trattazione sui punti all'infinito è stata fatta riferendoci sempre alle funzioni di due variabili complesse. L'estensione alle funzioni di più di due variabili complesse è semplice e non c'è che da ripetere ciò che si è detto, modificando opportunamente la terminologia. Già abbiamo detto che per introdurre i punti all'infinito nello spazio a $2n$ dimensioni delle n variabili complesse: $z_1, z_2, ..., z_n$, si considera lo spazio proiettivo complesso ad n dimensioni, nel quale le suddette variabili sono le coordinate correnti non omogenee. Analogamente a quanto si fa nel piano proiettivo complesso, si introducono nel suddetto spazio i punti all'infinito mediante le coordinate omogenee: $z_0, z_1, ..., z_n$, e si considera l'analiticità all'infinito di una funzione delle n variabili mediante l'invarianza rispetto alla omografia dello spazio. Si può, con procedimento del tutto analogo a quello seguito nel caso di due variabili, introdurre la varietà di Segre. Si considerano due spazi proiettivi complessi ad n dimensioni, chiamandone le coordinate correnti rispettivamente $(z_0, z_1, ..., z_n)$ e $(z'_0, z'_1, ..., z'_n)$. Si considerano poi le equazioni $Z_{kh} = z_k \; z'_h$ per $h, k = 0, 1...., n$. I prodotti $z_k \; z'_h$ sono $(n+1)^2$, cioè il numero delle disposizioni con ripetizioni di $n+1$ elementi a due a due. Interpretando le Z_{kh} come coordinate omogenee di uno spazio ad $(n+1)^2 - 1 = n(n+2)$ dimensioni, le suddette equazioni rappresentano una varietà a $2n$ dimensioni sull'$S_{n(n+2)}$. Ragionando sempre in modo perfettamente analogo a quanto già fatto si trova che il numero $\binom{2n}{n}$ rappresenta le dimensioni della varietà. Per ottenere i punti reali della varietà si pone $z'_k = \bar{z}_k$ e si ha così una corrispondenza biunivoca senza eccezioni tra i punti dell'S_n complesso ed i punti della varietà reale di Segre nell'$S_{n(n+2)}$. Ricordiamo di aver già dimostrato il teorema: "se una funzione di più variabili complesse è analitica esternamente ad una regione e se inoltre è limitata è una costante". Ora questo teorema, indipendentemente dal modo di definire i punti all'infinito nello spazio delle più variabili complesse, può essere enunciato nei seguenti termini: "se una funzione analitica è regolare all'infinito è costante". Tale teorema non sussiste per le funzioni di una variabile. Esso infatti non richiede l'analiticità in tutto lo spazio, mentre per le funzioni di una variabile il teorema analogo è quello di Liouville: "Una funzione olomorfa in tutto il piano e regolare all'infinito è costante". Si rifletta che la definizione di funzione analitica all'infinito importa l'invarianza dell'analiticità rispetto alle omografie. Ora, dal punto di vista proiettivo, nell'S_2 qualsiasi retta può essere omograficamente trasformata nella retta all'infinito; e nell'S_n qualsiasi S_{n-1} può essere trasformato nell'S_{n-1} all'infinito. Ciò importa che per avere la regolarità di una funzione all'infinito bisogna averla su un qualsiasi S_{n-1}. Perciò: "Una funzione di due variabili che si, mantiene regolare su una qualsiasi fetta complessa dell'S_2 proiettivo complesso è costante". In generale:

"Una funzione di n variabili complesse che si mantiene regolare su di un qualsiasi S_{n-1} dell'S_n proiettivo complesso è costante". Ritornando alle funzioni di due variabili e ricordando che ad una retta complessa del piano proiettivo complesso corrisponde sulla varietà di Segre un ellissoide, si traduce anche nei seguenti termini: "Una funzione che risulta analitica su un ellissoide della varietà di Segre è costante". Per le funzioni di una variabile sussiste il seguente teorema: "Dato un qualsivoglia insieme aperto del piano esiste una funzione analitica che ha come insieme di esistenza tale insieme". Tale teorema, contrariamente ad una affermazione di Weierstrass, non sussiste per le funzioni di più variabili. I precedenti risultati ci dicono infatti che il campo di esistenza delle funzioni di più variabili, ottenuto anche per prolungamento, non si può assegnare ad arbitrio. Basta considerare che non esiste una funzione analitica, non costante, il cui campo di esistenza sia la regione esterna ad un dato dominio dell'S_n.

PARTE IV - FUNZIONI IMPLICITE

Nell'argomento che ora incominciamo a trattare non ci interessa far ricorso alla parte reale ed al coefficiente dell'immaginario della variabile e delle funzioni, perciò useremo gli stessi simboli che, comunemente, si usano nella trattazione delle funzioni implicite reali. Così indicheremo con x ed y variabili complesse. Sia $F(x,y)$ una funzione di due variabili complesse, analitica in un campo A quale ad esempio, l'insieme dei punti interni di un bicilindro. Supponiamo ancora che tale funzione non sia identicamente nulla in A, e consideriamo la equazione:

$$F(x,y) = 0. \tag{1}$$

Sia (a,b) un punto di A, nel quale si abbia:

$$F(a,b) = 0. \tag{2}$$

Supponiamo ancora che non sia identicamente nulla la funzione della sola y

$$\varphi(y) = F(a,y) \tag{3}$$

la quale ha uno zero nel punto b. Diciamo n l'ordine di questo zero. Il teorema dell'indicatore logaritmico dà:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}dy = n \tag{4}$$

dove C è un contorno semplice nel piano della y, racchiudente il punto b e nessun altro zero di $\varphi(y)$. L'esistenza di un tale contorno si deduce dal fatto che la funzione $\varphi(y)$, non essendo identicamente nulla, ha in b uno zero isolato. La (4), in virtù della (3), si scrive

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\frac{\partial F(a,y)}{\partial y}}{F(a,y)}dy = n. \tag{5}$$

La funzione $F(x,y)$, non identicamente nulla ha uno zero nel punto (a,b) e non è mai nulla per $x = a$ e y compreso nell'intorno di C e distinto da b. Ne segue, per la continuità di $F(x,y)$ rispetto ad x, che nel piano delle x, esiste un intorno, Γ, di a tale che per x

compreso in tale intorno ed y compreso nell'intorno di C, la funzione $F(x,y)$ non è nulla. Allora l'espressione:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\frac{\partial F(a,y)}{\partial y}}{F(a,y)}dy$$

è una funzione continua della x nel suddetto intorno, Γ, di a. D'altra parte essa non può assumere che valori interi, quindi deve essere costante e perciò, in virtù della (5) è:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{F(x,y)}dy = n. \tag{6}$$

Ciò porta che l'equazione in y

$$F(x,y) = 0 \tag{7}$$

per ogni valore di x nell'intorno Γ, presenta n radici interne al dominio limitato dal contorno C. Non ci interessa individuare tali radici, che sono funzioni continue della x. Di esse ci interessano soltanto le funzioni simmetriche elementari. Per via abbiamo accertato che se l'equazione (4), ha per $x = a$, n radici uguali a b, per x compreso in un conveniente intorno di a, avrà n radici comprese in un intorno di b. Ricaviamo che, se $g(y)$ è una funzione avente n zeri internamente ad un intorno C e $\psi(y)$ è una funzione continua nel dominio limitato da C, la quantità

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \psi(y)\frac{g'(y)}{g(y)}dy$$

è uguale alla somma degli n valori che la $\psi(y)$ assume negli zeri della $g(y)$. Si deduce da ciò che l'espressione:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g'(y)}{g(y)}y^k dy$$

rappresenta la somma delle potenze k-me delle n radici dell'equazione in y (7) interne a C, per x contenuto in Γ, e data da:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{F(x,y)}y^k dy.$$

Ma l'integrale è una funzione analitica di x, dunque: "le cosiddette somme di Newton delle radici della equazione (7) in y sono funzioni analitiche di x in un opportuno intorno di a". Se ne deduce che anche le funzioni simmetriche elementari sono funzioni analitiche di x, giacchè esse si esprimono razionalmente mediante le somme di Newton. Indichiamo con $A_1(x), A_2(x), ..., A_n(x)$ tali funzioni simmetriche elementari. Precisamente con $A_k(x)$ indichiamo la somma dei prodotti a k a k delle radici. Dal risultato ottenuto discende che le suddette radici della (7) sono radici dell'equazione algebrica: $y^n+A_1(x)y^{n-1}+....+A_n(x) = 0$. Per $x = 0$ coincidendo tutte le radici in b, l'equazione algebrica si riduce a $(y-b)^n = 0$. La risoluzione dell'equazione (7) in y, localmente, cioè in un opportuno intorno di a, si riconduce alla risoluzione di un'equazione algebrica. Per semplificare le notazioni poniamo: $a = b = 0$, ciò che non lede la generalità, potendoci sempre ridurre a questo caso senza alterare l'analiticità della funzione. Inoltre chiamiamo "funzione algebroide" una funzione di x che è radice di una equazione algebrica con i coefficienti funzioni analitiche di x. Il risultato ottenuto si traduce nel seguente teorema: "se la funzione di due variabili complesse $F(x, y)$ è analitica e non identicamente nulla in un campo contenente l'origine, se nell'origine è

$$F(0, 0) = 0 \tag{8}$$

se, inoltre, non è identicamente nulla la funzione $F(0, y)$ della sola y, se infine l'equazione in y:

$$F(0, y) = 0 \tag{9}$$

ha n radici coincidenti nello zero, allora si possono determinare due numeri, "r" e "ρ", positivi e sufficientemente piccoli, tali che, per ogni x compreso nell'intorno dell'origine di raggio r, nel piano delle x, $|x| < r$, l'equazione (7) in y, ha n radici comprese nell'intorno dell'origine di raggio ρ, nel piano delle y. Esse sono funzioni algebriche, perchè sono radici di un'equazione algebrica: $y^n + a_1(x)y^{n-1} + ... + a_n(x) = 0$, dove le $a_i(x)$ sono funzioni analitiche di x, tutte nulle per $x = 0$". Se è $n = 1$, se cioè la radice che l'equazione (9) ha nel punto zero è semplice, la equazione algebrica è lineare: $y + a_1(x) = 0$, e dà $y = -a_1(x)$. Cioè "l'equazione (7), per ogni x contenuto in un opportuno intorno dello zero, ammette una sola radice in y, anch'essa contenuta in un intorno dello zero, la quale inoltre risulta funzione analitica di x. In altri termini, si possono trovare un intorno della origine nel piano delle x e un intorno dell'origine nel piano delle y in modo che ad ogni x del primo intorno corrisponde un valore di y contenuto nel secondo intorno e tale che la coppia numerica (x, y) così ottenuta soddisfa alla (7)". Tale corrispondenza definisce una funzione analitica, $y(x)$ tale da aversi identicamente $F(x, y(x)) = 0$. Questo caso, come si è detto, si presenta quando è verificata la (8) e lo zero è radice semplice della (9); si ha cioè quando, insieme alla (8) è $F_y(0, 0) \neq 0$. Si vede allora che il risultato ottenuto estende al campo complesso il teorema fondamentale delle funzioni implicite nel campo reale. Tale enunciato si può esprimere col seguente teorema che coincide con l'enunciato del suddetto teorema del campo reale: "se $F(x, y)$ è una funzione di due variabili complesse analitica in un campo contenente l'origine ed ivi non identicamente nulla, se è $F(0, 0) = 0$ e $F_y(0, 0) \neq 0$ allora esiste un intorno dell'origine, nel quale la equazione (7) definisce y come funzione analitica della x". È facile persuadersi che, dal risultato così ottenuto, si possono ricavare tutte le conseguenze che si deducono dal teorema fondamentale delle funzioni implicite di una variabile. Così, ad esempio, essendo $F(x, y)$ analitica ed essendo ancora analitica la funzione $y(x)$, definita localmente dall'equazione (1), risulta anche analitica localmente la funzione $F(x, y(x))$ della sola x.[1′] Allora, derivando l'identità $F(x, y(x)) = 0$, con la regola delle funzioni composte, si ottiene:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'(x) = 0$$

da cui si ha l'espressione della derivata:

$$y'(x) = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Teniamo ora presente che, nel campo delle funzioni di variabili reali, tutti [i *n.d.c.*] teoremi sulle funzioni implicite di più variabili e quelle dei sistemi di funzioni implicite si

[1′] Veramente questa affermazione, come pure la regola di derivazione delle funzioni composte, della quale ci serviremo appresso, non sono affatto dimostrate. Ma le dimostrazioni non presentano difficoltà di sorta, essendo perfettamente identiche a quelle che si fanno per le funzioni di variabili reali.

dimostrano ricalcando la dimostrazione del teorema fondamentale e, nel caso dei sistemi, procedendo funzione per funzione. Lo stesso può farsi per le funzioni di più variabili complesse, deducendo in tal modo l'estensione di tutti i teoremi sulle funzioni implicite di più variabili e sui sistemi di funzioni implicite. Ci limiteremo a dare il solo enunciato di alcuni di questi teoremi. Le dimostrazioni non sono affatto difficili, non differendo da quelle fatte nel campo reale, purchè all'ipotesi di continuità si sostituisca l'ipotesi di analiticità: "Se $F(y, x_1, x_2, ..., x_n)$ è una funzione di $n+1$ variabili complesse, analitica nel campo A dello spazio a $2n+2$ dimensioni, ivi non identicamente nulla; se in un punto $(\bar{y}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ di A risulta:

$$F(\bar{y}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) = 0$$

mentre in tale punto la derivata di F rispetto ad y è diversa da zero, allora l'equazione: $F(y, x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ è atta a definire localmente la y come funzione analitica delle variabili x_i; nel senso che si possono determinare due numeri r e ρ, positivi ed opportunamente piccoli, in modo che ad ogni punto $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dello spazio a $2n$ dimensioni, avente ciascuno le coordinate complesse in modulo minori di r, cioè ad ogni punto interno al policilindro definito dalle limitazioni: $|x_1| \leq r$; $|x_2| \leq r$; .... ; $|x_n| \leq r$, corrisponde un valore di y di modulo minore di ρ". Tale corrispondenza definisce y come funzione delle variabili $x_i : \; y(x_1, x_2, ..., x_n)$ analitica nell'interno del suddetto policilindro e tale da risultare identicamente: $F(y(x_1, ..., x_n), x_1, ..., x_n) = 0$. Le derivate si ottengono facilmente derivando questa identità con la regola delle funzioni composte. Si ha:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} : \frac{\partial F}{\partial y} \quad \text{per} \quad i = 1, 2, ...n.$$

Con l'avvertenza che, per i determinanti e le matrici jacobiani valgono gli stessi simboli noti dall'analisi delle funzioni nel campo reale, si può parlare di sistemi di funzioni implicite ed enunciare il teorema: "Siano assegnate n funzioni di $n+m$ variabili complesse: $F_k(y_1, y_2, ..., y_n, x_1, x_2, ..., x_m)$ per $k = 1, 2.., n$ analitiche in un campo, A, dello spazio a $2(n+m)$ dimensioni, ivi non identicamente nulle, sia inoltre $(y_1, y_2, ..., y_n, x_1, ..., x_m)$ un punto di A, nel quale le funzioni risultino nulle, mentre nello stesso punto si abbia:

$$\frac{\partial(F_1, F_2, ..., F_n)}{\partial(y_1, y_2, ..., y_n)} \neq 0.$$

Allora, in un opportuno intorno di tale punto, le equazioni:

$$F_k(y_1, y_2, ...y_n, x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \text{ per } k = 1, 2, ..., n$$

definiscono n funzioni analitiche nelle variabili $x_1, x_2, ..., x_m$ $y_i = y_i(x_1, x_2, ..., x_m)$ per $i = 1, 2, ..., n$; in modo da risultare identicamente:

$$F_k(y_1(x_1, ..., x_m), .., y_n(x_1, .., x_m); x_1, x_2, .., x_m) = 0$$

per $k = 1, 2, ..n$". Per ottenere le derivate delle funzioni $y_i(x_1.., x_m)$ basta derivare l'ultima identità. Volendo per esempio, la derivata della y_1 rispetto alla x_r si derivano tutte le identità rispetto ad x_r, si hanno così le altre identità:

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_r} + \frac{\partial F_k}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_r} + ... + \frac{\partial F_k}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_r} = 0$$

che si possono riguardare come equazioni lineari nelle incognite $\frac{\partial y_1}{\partial x_r}, \frac{\partial y_2}{\partial x_r}, ...\frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_r}, \frac{\partial y_n}{\partial x_r}$. Risolvendo tali equazioni si ottiene

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_r} = -\frac{\partial(F_1, F_2, ...F_{n-1}, F_n)}{\partial(y_1....y_{r-1}, x_r, y_{r+1}, ...y_n)} : \frac{\partial(F_1, F_2, ...F_n)}{\partial(y_1, y_2, ...y_n)}.$$

Come caso particolare del precedente teorema si ha: "Date n equazioni

$$y_k = f_k(x_1, x_2, .., x_n) \text{ per } k = 1, 2, ..n$$

le quali, nello spazio a $2n$ dimensioni, definiscono una trasformazione, se le funzioni f_k sono analitiche in un campo A e se, in un punto $(\bar{x}_1, ...\bar{x}_n)$ di A risulta:

$$\frac{\partial(f_1, f_2, .., f_n)}{\partial(x_1, x_2, .., x_n)} \neq 0$$

allora, localmente, cioè in un intorno del suddetto punto, le precedenti equazioni sono atte a definire le x_i come funzioni analitiche delle y_k". In altri termini la trasformazione definita dalle equazioni date risulta "invertibile". Trasformazioni di questo genere sono state definite "analiticamente". Tale denominazione non è veramente la più adatta. Una denominazione più indicata si ha chiamandole "trasformazioni pseudoconformi". Nel caso di una sola variabile, le trasformazioni invertibili nel piano complesso sono le trasformazioni conformi. Nel caso di più variabili non si possono chiamare conformi, perchè, in generale, non conservano gli angoli. Si chiamano pseudoconformi perchè conservano gli angoli appartenenti ad alcune particolari giaciture, come ora vogliamo vedere, limitandoci al caso di due variabili. Consideriamo le due equazioni:

$$\xi = \alpha(x, y) \qquad \eta = \beta(x, y) \tag{10}$$

con α e β funzioni analitiche di x ed y in un certo campo A. Nell'intorno di ogni punto (x, y) nel quale risulta:

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x} & \frac{\partial\alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{11}$$

le (10) risultano invertibili potendosi ottenere da esse:

$$x = \lambda(\xi, \eta) \qquad y = \mu(\xi, \eta) \tag{12}$$

con λ e μ funzioni analitiche di ξ ed η in un certo intorno del punto (ξ, η) corrispondente al punto (x, y) mediante le (10). Si ha così una corrispondenza biunivoca tra i due intorni. Le (11) qualora ad x ed y si sostituiscano i secondi membri delle (12) diventano due identità. Derivando entrambe queste identità una volta rispetto ad ξ ed un'altra volta rispetto ad η si ha:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial\xi} \\ 0 = \frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial\xi} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 0 = \frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial\eta} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial\eta} \\ 1 = \frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial\eta} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial\eta} \end{array}\right\}.$$

Da questi due sistemi, sussistendo le (11), si ricava:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\xi} = \frac{\partial\beta}{\partial y} : \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\eta} = -\frac{\partial\alpha}{\partial y} : \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial\xi} = \frac{\partial\beta}{\partial x} : \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \qquad \frac{\partial\mu}{\partial\eta} = \frac{\partial\alpha}{\partial x} : \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}. \tag{13}$$

E pertanto risulta:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = \left[\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right]^{-2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial\beta}{\partial y} & -\frac{\partial\alpha}{\partial y} \\ -\frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\alpha}{\partial x} \end{vmatrix}.$$

Se ne deduce che, se in un punto (x, y) è verificata la (11), nel punto (ξ, η) corrispondentemente risulta anche:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \neq 0.$$

Sia ora (x_0, y_0) un punto nel quale supponiamo sia verificata la (11) ed:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \tag{15}$$

sia l'equazione di un piano caratteristico per tale punto. Diciamo (ξ_0, η_0) le coordinate complesse del punto corrispondente, poniamo cioè per semplicità: $\xi_0 = \alpha(x_0, y_0); \eta_0 = \beta(x_0, y_0)$. Se del punto (x_0, y_0) consideriamo un intorno abbastanza piccolo, dalle (10) abbiamo: $\xi - \xi_0 = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial \alpha}{\partial y}(y - y_0)$; $\eta - \eta_0 = \frac{\partial \beta}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial \beta}{\partial y}(y - y_0)$

dove, naturalmente, le derivate si intendono calcolate nel punto (x_0, y_0). Risolvendo rispetto ad $(x - x_0)$ ed $(y - y_0)$ ciò che, in virtù delle (11) è lecito, sostituendo nella (15) e prescindendo dal fattore non nullo $\left[\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right]^{-1}$ si ottiene:

$$\left(a\frac{\partial \beta}{\partial y} - b\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)(\xi - \xi_0) + \left(b\frac{\partial \alpha}{\partial x} - a\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)(\eta - \eta_0) = 0 \tag{16}$$

che è la equazione di un piano caratteristico per il punto (ξ_0, η_0). Dunque: "La corrispondenza determinata dalla (10) tra gli intorni di due punti trasforma piani caratteristici, in piani caratteristici, restringendo opportunamente i due intorni". Allo stesso risultato si può pervenire riferendoci alle equazioni parametriche del piano caratteristico. Un piano caratteristico per il punto (ξ_0, η_0) può essere rappresentato anche da due equazioni del tipo:

$$x = x_0 + ht; \qquad y = y_0 + kt \tag{17}$$

con t parametro complesso. I corrispondenti punti si hanno operando nelle (10) la sostituzione definita dalle (17)

$$\xi = \alpha(x_0 + ht, y_0 + kt) \qquad \eta = \beta(x_0 + ht, y_0 + kt). \tag{18}$$

I punti di un intorno di (x_0, y_0) nel piano si hanno in corrispondenza dei valori di t in un intorno dell'origine nel piano delle t. Mediante le (18) a tale intorno della t corrisponde ancora un intorno del punto (ξ_0, η_0). Se l'intorno dell'origine nel piano delle t è sufficientemente piccolo, negli sviluppi in serie delle (18) si possono trascurare i termini di grado superiore al primo in t. Si ha così:

$$\xi = \xi_0 + \left(h\frac{\partial\alpha}{\partial x} + k\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)t \qquad \eta = \eta_0 + \left(h\frac{\partial\beta}{\partial x} + k\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)t \tag{19}$$

che sono le equazioni di un piano caratteristico. Possiamo in definitiva enunciare il teorema: "Se $\alpha(x,y)$ e $\beta(x,y)$ sono due funzioni analitiche in un certo campo A, ad jacobiano non nullo per ogni punto (x_0, y_0) di A possono determinarsi due numeri, r e ρ, positivi e sufficientemente piccoli, in modo che tra i due policilindri, determinato uno dalle relazioni: $|x - x_0| \leq r$; $|y - y_0| \leq r$ e l'altro dalle limitazioni: $|\xi - \alpha(x_0, y_0)| \leq \rho$, $|\eta - \beta(x_0, y_0)| \leq \rho$, le equazioni (10) definiscono una trasformazione invertibile che trasforma una giacitura caratteristica in una altra pure caratteristica". Si può ora far vedere che su due giaciture caratteristiche corrispondenti la trasformazione è conforme. Per semplificare diciamo π il piano caratteristico di equazione (17) e π' il piano caratteristico corrispondente di equazioni (19). La corrispondenza (locale) tra i due piani è posta dalle (17) e (19), mediante la variabile complessa t. Quindi, due direzioni, una di π e l'altra di π' sono corrispondenti se corrispondono alla stessa direzione del piano delle t. D'altra parte notiamo ancora che le quattro equazioni (17) e (19) definiscono quattro trasformazioni conformi tra il piano delle t ed i singoli piani delle x, delle y, delle ξ, delle η. Ciò posto, diciamo d e δ due direzioni uscenti dall'origine nel piano delle t. Indichiamo poi con r e ρ le due direzioni corrispondenti nel piano π e con r' e ρ' le due direzioni corrispondenti nel piano π'. Si tratta di far vedere che gli angoli delle due coppie r, ρ e r', ρ' sono uguali. Mediante la prima equazione delle (17), alle due direzioni d e δ corrispondono due direzioni nel piano delle x, delle quali diciamo rispettivamente (α', α'') e (β', β'') i coseni direttori, e notiamo che la corrispondenza è conforme. Mediante la prima delle (19) le due direzioni d e δ si trasformano in due direzioni del piano delle ξ delle quali diciamo (α_1', α_2') e (β_1', β_2') rispettivamente i coseni direttori. Anche questa trasformazione è conforme. Segue allora che l'angolo delle due direzioni del piano delle x e l'angolo delle due direzioni del piano delle ξ sono uguali e perciò è:

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = \alpha_1'\beta_1' + \alpha_2'\beta_2'.$$

Quello che si è detto prendendo in considerazione le sole prime equazioni delle due coppie (17) e (19) si può ripetere prendendo in considerazione le seconde equazioni. Detti allora (α_3, α_4) e (β_3, β_4) i coseni direttori delle due direzioni del piano delle y [che *n.d.c.*] corrispondono a d e δ, e (α'_3, α'_4), (β'_3, β'_4) i coseni direttori corrispondenti a d e δ nel piano delle η, si ha:

$$\alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4 = \alpha'_3\beta'_3 + \alpha'_4\beta'_4.$$

Si consideri infine che i coseni direttori delle due direzioni r ed ρ nel piano π dello spazio a quattro dimensioni sono evidentemente $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ e $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, ed i coseni direttori delle conseguenti direzioni r' e ρ' nel piano π' sono $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4)$ $(\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3, \beta'_4)$. Dalle due relazioni si ricava:

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4 = \alpha'_1\beta'_1 + \alpha'_2\beta'_2 + \alpha'_3\beta'_3 + \alpha'_4\beta'_4$$

ciò che dimostra il nostro asserto. Per continuare con le analogie nel campo delle funzioni di variabili reali ricordiamo che nel campo reale l'equazione:

$$f(x, y) = 0 \tag{20}$$

definisce una curva localmente regolare, se le due derivate parziali della funzione f non sono mai simultaneamente nulle. Sotto tale ipotesi, dalla (20) si può ottenere una rappresentazione locale esplicita della curva o mediante una equazione del tipo:

$$y(x) = y \tag{21}$$

o mediante una del tipo:

$$x = x(y). \tag{22}$$

Se un punto (x_0, y_0) appartiene alla curva, se cioè risulta:

$$f(x_0, y_0) = 0 \tag{23}$$

l'equazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) = 0 \tag{24}$$

dove le derivate si intendono calcolate nel punto (x_0, y_0) è la equazione della tangente alla curva nel punto (x_0, y_0). Nel campo complesso, nelle ipotesi che la funzione $f(x, y)$, delle due variabili complesse x e y, sia analitica in un campo A e che le due derivate parziali non siano mai simultaneamente nulle:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| > 0 \tag{25}$$

un'equazione del tipo (20) rappresenta una varietà a due dimensioni, localmente regolare ed esplicabile, cioè rappresentabile, o mediante una equazione del tipo (21) o mediante una del tipo (22). Si tratta dunque di una superficie caratteristica dello spazio a quattro dimensioni. L'equazione (24), qualora è verificata la (23), è l'equazione di un piano caratteristico per il punto della superficie (x_0, y_0), piano tangente alla superficie. Pertanto: "I piani tangenti ad una superficie caratteristica sono piani caratteristici". Consideriamo ora la trasformazione definita dalle (10). Supponiamo che in ogni punto (x, y) della superficie sia verificata la (11). La (20), mediante le (12) diventa: $F(\xi, \eta) = f(\lambda(\xi, \eta), \mu(\xi, \eta)) = 0$. Si ha:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}. \tag{26}$$

Sussistendo la (25), la (14) ci assicura che non può essere: $\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$ simultaneamente, cioè nello stesso punto. L'equazione:

$$F(\xi, \eta) = 0 \tag{27}$$

rappresenta dunque una superficie caratteristica al pari della (20). "Le trasformazioni pseudoconformi trasformano superficie caratteristiche in superficie caratteristiche". Diciamo al solito (ξ_0, η_0) le coordinate del punto corrispondente mediante la trasformazione definita dalle (10), al punto (x_0, y_0). L'equazione del piano tangente alla superficie trasformata, di equazione (27), nel punto (ξ_0, η_0), è:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi - \xi_0) + \frac{\partial F}{\partial \eta}(\eta - \eta_0) = 0. \tag{28}$$

L'equazione del piano trasformato del piano (24), tangente alla superficie (20) nel punto (x_0, y_0) è, come si deduce dalla (16):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)(\xi - \xi_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)(\eta - \eta_0) = 0.$$

Tenendo conto della (13) e prescindendo dal fattore non nullo $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}$ la precedente equazione diventa:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \lambda}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \mu}{\partial \xi}\right)(\xi - \xi_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \lambda}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \mu}{\partial \eta}\right)(\eta - \eta_0) = 0$$

equazione questa che, in virtù delle (26) coincide con la (25) ciò che ci assicura che il piano tangente alla superficie trasformata in un punto corrispondente al punto (x_0, y_0) della superficie (20) coincide col piano trasformato del piano tangente alla superficie (20) nel punto (x_0, y_0). Dunque: "Una trasformazione pseudoconforme trasforma superficie caratteristiche in superficie caratteristiche e piani tangenti in piani tangenti". Questo risultato ci autorizza ancora ad asserire, qualora si tenga conto del risultato già precedentemente conseguito, che anche sulle superficie caratteristiche la trasformazione definita dalle (10) è una trasformazione conforme. Prima di chiudere questo argomento vogliamo fare un accenno alle equazioni implicite delle varietà ad un numero qualsiasi di dimensioni. In generale, equazioni del tipo:

$$x_k = \varphi_k(t_1, t_2, .., t_r) \text{ per } k = 1, 2, .., n \tag{29}$$

definiscono, nello spazio [a *n.d.c.*] $2n$ dimensioni delle n variabili complesse x_k, una varietà ad r dimensioni, cioè a $2r$ dimensioni reali, qualora le $\varphi_k(t_1, t_2, .., t_r)$ sono funzioni analitiche delle r variabili complesse t_i in un campo T; tale varietà si dice regolare se la matrice jacobiana

$$\frac{\partial(x_1, x_2, ..x_n)}{\partial(t_1, t_2, ..t_r)}$$

ha caratteristica massima in T. Le (29) sono le equazioni parametriche della varietà. Si noti però che, mediante equazioni parametriche del tipo (29), non si viene a definire una generica varietà a $2r$ dimensioni dello spazio a $2n$ dimensioni, giacchè è vero che le

(29) assegnano le $2n$ coordinate reali dello spazio in funzione di $2r$ parametri reali, ma le vincolano ad essere a due a due la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di una funzione analitica di r parametri complessi. Le varietà definite da sistemi di equazioni del tipo (29) sono le "varietà caratteristiche" dello spazio a $2n$ dimensioni. Una varietà caratteristica ad r dimensioni complesse si può anche rappresentare [esprimendo *n.d.c.*] comunque $n-r$ coordinate complesse in funzione delle altre r, con l'ipotesi che le funzioni siano analitiche. Così le equazioni $y_k = y_k(x_1, x_2, .., x_r)$ per $k = 1, 2, .., n-r$, con le y_k funzioni analitiche delle $x_1, x_2, .., x_r$ sono le equazioni, che diremo esplicite, di una varietà caratteristica a $2r$ dimensioni nello spazio a $2n$ dimensioni. Per la regolarità si fa la solita ipotesi sulla matrice jacobiana. Anche le varietà caratteristiche possono essere definite da equazioni implicite. Ciò si deduce dal teorema sulle funzioni implicite di più variabili e da quello sui sistemi di funzioni implicite, già precedentemente enunciati. Così una equazione del tipo: $f(x_1, x_2, .., x_n) = 0$, nella ipotesi che la funzione sia analitica, rappresenta una varietà a $2(n-1)$ dimensioni nello spazio a $2n$ dimensioni, e nella ipotesi che le derivate parziali non siano tutte contemporaneamente nulle. Più in generale, siano date m funzioni in n variabili, con $m < n$

$$f_k(x_1, x_2, .., x_n) = 0 \quad k = 1, 2, .., m \tag{30}$$

sotto le ipotesi che le funzioni f_k siano tutte analitiche in un campo A e che la matrice jacobiana:

$$\frac{\partial(f_1, f_2, .., f_m)}{\partial(x_1, x_2, .., x_n)}$$

abbia un minore di ordine massimo non nullo, le (30) definiscono $n-m$ delle variabili in funzione delle altre m e, pertanto rappresentano una varietà regolare ad $n-m$ dimensioni complesse, ossia a $2(n-m)$ dimensioni reali. La varietà è localmente regolare in A, se la suddetta matrice jacobiana è in A di caratteristica massima, se, cioè per ogni punto [di *n.d.c.*] A esiste un minore di ordine massimo non nullo nel punto. In tal caso nell'intorno di ogni punto di A, le (30) permettono di ricavare m variabili in funzione delle altre $n-m$. Può accadere che le (30) definiscono anche una varietà avente un numero di dimensioni minore di $n-m$.

In altri termini, ciascuna delle (30) definisce una varietà ad $n-1$ dimensioni complesse. Tutte le varietà definite dalle (30) hanno, in generale, in comune una varietà ad $n-m$ dimensioni, ma può accadere che, oltre di questa, abbiano in comune una altra varietà di dimensioni minori, di modo che le (30) non sono sufficienti a rappresentare la sola varietà ad $n-m$ dimensioni. Ciò analogamente a quanto avviene nello spazio reale a tre dimensioni, dove una curva generalmente si rappresenta mediante due superficie alle quali appartiene; ma può accadere che due superficie non siano sufficienti. Ne possono occorrere fino a quattro. Non è però il caso di fermarsi a lungo su tale argomento. Applicando ai punti dello spazio a $2n$ dimensioni una trasformazione invertibile si possono fare sulle varietà caratteristiche considerazioni analoghe a quelle fatte sulle superficie caratteristiche nello spazio a quattro dimensioni. Ritorniamo alle funzioni implicite e precisamente al risultato generale ottenuto col primo teorema, risultato che da Weierstrass per primo fu ottenuto come conseguenza di un altro teorema che dicesi "Teorema preliminare", il quale va però oltre la portata del suddetto risultato. All'enunciato di tale teorema preliminare ci proponiamo ora di pervenire. Ricordiamo brevemente il teorema già stabilito.

"Se nell'origine la funzione analitica $f(x, y)$ è nulla se l'ordine che la radice ha nell'equazione in y

$$f(0, y) = 0$$

per $y = 0$ è m, esistono due numeri positivi r e ρ, tali che per x in modulo minore di r, l'equazione

$$f(x, y) = 0$$

ha m radici, ciascuna in modulo minore di ρ, le quali radici sono funzioni algebroidi, essendo anche radici di un'equazione algebrica

$$y^n + a_1(x)y^{n-1} + ... + a_n(x) = 0$$

a coefficienti funzioni analitiche di x e tutte nulle per $x = 0$". Diciamo

$$y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$$

tali radici ed avvertiamo di nuovo che non occorre individuarle aggiungendo anzi che ciò non è addirittura possibile, perchè esse non si possono isolare tra di loro, nel senso che, al variare di x, una si può scambiare con l'altra. Si ha in tutti i modi

$$(y - y_1)(y - y_2)...(y - y_n) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + ... + a_n(x).$$

Ricordiamo ora che, se la funzione $\psi(y)$ è olomorfa in un certo dominio D ed ha ivi gli zeri $y_1, y_2, ..., y_n$, la funzione

$$\frac{\psi(y)}{(y - y_1)(y - y_2)....(y - y_n)}$$

è olomorfa in D ed ivi priva di zeri.

Segue da ciò che la funzione

$$\varphi(x, y) = \frac{f(x, y)}{(y - y_1)(y - y_2)...(y - y_n)} \qquad (= 31)$$

per ogni valore di x minore in modulo di r, risulta funzione olomorfa di y e priva di zeri in ogni, dominio del piano delle y interno al dominio circolare di centro nell'origine e raggio ρ. Indicando allora con C il contorno di uno di tale dominio, la formula di Cauchy dà

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(x, \eta)}{\eta - y}\, d\eta.$$

Essendo η su C ed y interno al dominio di cui C è il contorno, l'integrale rappresenta una funzione analitica di x e di y. Concludiamo pertanto che la funzione $\varphi(x, y)$, definita dalla posizione (31) è funzione analitica delle due variabili in ogni dominio interno a cilindri determinati dalle limitazioni

$$|x| \leq r \qquad |y| \leq \rho.$$

Dopo di che è lecito dalla (31) dedurre la relazione

$$f(x, y) = \Big[(y - y_1)(y - y_2)...(y - y_n)\Big]\varphi(x, y)$$

ossia:

$$f(x, y) = \Big[y^n + a_1(x)y^{n-1} + ... + a_n(x)\Big]\varphi(x, y).$$

Questa relazione esprime il teorema preliminare di Weierstrass: "Se una funzione $f(x, y)$ è nulla nell'origine e non è identicamente nulla la funzione $f(0, y)$, nell'intorno dell'origine la $f(x, y)$ si può esprimere come prodotto di una funzione mai nulla per un polinomio in y i cui coefficienti sono funzioni analitiche di x, il primo uguale all'unità e gli altri tutti nulli per $x = 0$". Weierstrass da questo teorema trasse la conseguenza immediata che gli zeri della funzione in y, $f(x, y)$, per ogni x di un opportuno intorno dell'origine, sono gli zeri del polinomio. Il teorema è stato stabilito nell'ipotesi che, in un intorno dell'origine, non sia identicamente nulla la funzione $f(0, y)$. Supponiamo invece che risulti $f(0, y) = 0$ senza però che sia identicamente nulla la funzione $f(x, y)$. Essendo la funzione $f(x, y)$ analitica in un campo contenente l'origine, e sviluppante in serie di Taylor col punto iniziale nell'origine. L'essere identicamente nulla la funzione $f(0, y)$ importa che, nello sviluppo di Taylor, tutti i termini debbono avere a fattore una potenza di x, di modo che può porsi:

$$f(x, y) = x^k g(x, y)$$

dove la funzione $g(x, y)$ non si trova affatto nelle medesime condizioni. Non si ha, cioè $g(x, y) = 0$. Si può quindi applicare alla funzione $g(x, y)$ il precedente teorema. In tal modo per la $f(x, y)$ si ha la decomposizione

$$f(x, y) = x^k \Big[y^n + a_1(x) y^{n-1} + ... + a_n(x) \Big] \varphi(x, y).$$

Volendo dunque prescindere dall'ipotesi che la $f(0, y)$ non sia identicamente nulla, il teorema può enunciarsi nella forma generale che ora abbiamo:

"Se la funzione $f(x, y)$ è analitica in un campo contenente l'origine senza essere identicamente nulla, e però nulla nell'origine, in un opportuno intorno dell'origine è

$$f(x, y) = \Big[a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + .. + a_n \Big] \varphi(x, y)$$

dove la $\varphi(x, y)$ è una funzione mai nulla nel detto intorno dell'origine ed i coefficienti del polinomio sono funzioni analitiche della x, le quali sono tutte nulle per $x = 0$, tranne al più la prima a_0, che può risultare non nulla".

Dal teorema preliminare stabilito da Weierstrass per le funzioni di due variabili, fu tentata dall'Osgood l'estensione alle funzioni di più variabili. In una conferenza questo autore enunciò il teorema esteso alle funzioni di n variabili, aggiungendo che, dopo averci molto pensato su, non aveva potuto dimostrarlo nella forma più generale, ma d'altra parte, non aveva trovato niente che vi contraddicesse. Qualche anno più tardi, egli stesso pubblicava un esempio, nel quale il teorema, nella forma più generale dell'ultimo enunciato, cade in difetto.

Per le funzioni di più di due variabili il teorema sussiste perciò soltanto sotto la forma ristretta del primo enunciato:

"Se $f(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ è una funzione di $n + 1$ variabili complesse, analitica in un campo contenente l'origine e se non è identicamente nulla la funzione $f(0, 0, ...0, y)$, allora, in un opportuno intorno dell'origine è

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, y) = \Big(y^n + a_1 y^{n-1} + ... + a_n\Big)\varphi(x_1, x_2, ..., x_n, y)$$

dove la $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ è una funzione mai nulla nel suddetto intorno e i coefficienti del polinomio, ad eccezione del primo che è l'unità, sono funzioni analitiche del [delle *sic*] $x_1, x_2, ..., x_n$, tutte nulle per $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$".

L'esempio pubblicato dall'Osgood fa vedere che il teorema non sussiste nemmeno nella forma modificata, se nell'intorno dell'origine la funzione della sola y, $f(0, 0, ..., 0, y)$, è identicamente nulla. In tal caso però nell'ipotesi che non sia identicamente nulla la funzione $f(x_1, x_2, ..., x_n, y)$, è sempre possibile operare un cambiamento di variabili in modo che la funzione trasformata nelle nuove variabili sia tale da non verificarsi più la suddetta identità a zero. Pertanto, nella forma più generale per le funzioni di più di due variabili, il teorema può essere dato nei seguenti termini:

"Una funzione di più variabili, analitica in un campo e non identicamente nulla nell'intorno di un punto del campo, nell'intorno di tale punto, pur di operare un cambiamento di variabili, può essere posta sotto la forma il prodotto di una funzione mai nulla per un polinomio in una delle variabili, i cui coefficienti sono funzioni analitiche delle altre variabili, tutti, ad eccezione del primo, nulli per valori nulli delle variabili".

N.B. che il suddetto cambiamento di variabili sia possibile è presto visto. L'essere

$$f(0, 0, ..., 0, y) = 0$$

significa che la funzione $f(x_1, x_2, .., x_n, y)$, pur non essendo identicamente nulla, lo è però sul piano della y. Si tratta dunque di operare un cambiamento di variabili tali che il piano delle y sia un altro nel quale [la *n.d.c.*] deprecata circostanza non si verifica più. Il piano delle y è un piano caratteristico. Non essendo identicamente nulla la funzione $f(x_1, x_2, ..x_n, y)$, vi saranno dei punti, nell'intorno dell'origine, nei quali la $f(x_1, ..x_n, y)$ non è nulla. Basta allora fissare uno di tali punti e prendere come nuovo piano delle y il piano caratteristico che congiunge tale punto con l'origine. Un procedimento analogo si usa nel campo reale. Se è identicamente nulla $f(0, y)$ e non lo è $f(x, y)$, si prende un punto (x, y) nel quale è $f(x, y) \neq 0$ e si assume come nuovo asse y la retta che congiunge questo punto con l'origine. In modo poi del tutto analogo si opera nel caso che le variabili siano più di due.

Dal teorema preliminare di Weierstrass segue che lo studio delle radici dell'equazione

$$f(x, y) = 0$$

nell'intorno dell'origine può essere fatto sostituendo alla suddetta equazione l'altra più semplice

$$y^n + a_1(x)y^{n-1} + ... + a_n(x) = 0. \tag{32}$$

Nel caso che risulti identicamente nulla la funzione della sola y, $f(0, y)$, si prende in considerazione un'equazione del tipo

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + ... + a_n(x) = 0.$$

Qualora si tratti di una equazione il cui primo membro è una funzione di più di due variabili

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0$$

dopo un eventuale cambiamento di variabili, ci si riconduce ad una equazione del tipo (32), dove però i coefficienti sono funzioni analitiche delle n variabili $x_1, ..., x_n$.

Si dà il nome di "pseudopolinomio" di grado n ad ogni funzione del tipo $a_0y^n + a_1y^{n-1} + ... + a_n$ dove $a_0, a_1, ..., a_n$ sono funzioni di una o più variabili, analitiche in un certo campo.

Ai [Agli *sic*] pseudopolinomi del tipo

$$y^n + a_1 y^{n-1} + ... + a_n$$

soddisfacenti alle condizioni del teorema preliminare di Weierstrass e pertanto con

$$a_1, a_2, ...a_n,$$

funzioni di una o più variabili, analitiche in un campo contenente l'origine e tutte nulle nell'origine si dà il nome di "pseudopolinomi specializzati". Relativamente ai [agli *sic*] pseudopolinomi si può svolgere una teoria analoga alla teoria algebrica dei polinomi. Nelle pagine che seguono facciamo qualche cenno dell'argomento, limitandoci a poche considerazioni fondamentali e prendendo in esame, per semplicità, soltanto gli pseudopolinomi in due variabili, cioè gli pseudopolinomi, i cui coefficienti sono funzioni analitiche di una sola variabile. Avvertiamo una volta per sempre, che in questa teoria non hanno importanza le costanti additive e perciò quando si parla di equivalenza, eguaglianza, ecc. ... si deve intendere sempre [a *n.d.c.*] meno di una costante additiva.

Due pseudopolinomi $f(x, y)$ e $g(x, y)$, li diremo identici se risulta per ogni valore di y

$$f(x, y) = g(x, y).$$

Uno pseudopolinomio si dice "identicamente nullo", se per ogni particolare valore di y, risulta identicamente nulla la funzione della sola x alla quale esso si riduce.

È facile dimostrare il seguente teorema:

"condizioni necessarie e sufficienti perchè uno pseudopolinomio sia identicamente nullo è che siano identicamente nulli i suoi coefficienti".

Che la condizione sia sufficiente è fuori dubbio. Mostriamo che è anche necessaria. Supponiamo che lo pseudopolinomio

$$F(x, y) = a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + ... + a_n(x)$$

sia identicamente nullo. Dovendo risultare

$$F(x, 0) = 0$$

deve essere $a_n(x) = 0$ dopo di che deve risultare identicamente nullo lo pseudopolinomio

$$a_0(x)y^{n-1} + a_1(x)y^{n-2} + ... + a_{n-1}(x)$$

per ogni $y \neq 0$ e, perciò, anche il limite per $y \to 0$, ciò che importa $a_{n-1}(x) = 0$.

Così continuando si perviene alla conclusione che i coefficienti sono tutti identicamente nulli.

Conseguenza immediata del teorema è che "uno pseudopolinomio specializzato non può essere identicamente nullo"; ciò del resto si deduce dalla stessa definizione di pseudopolinomio specializzato. Segue pure, come è facile dimostrare il teorema sulla identità di due pseudopolinomi:

"Condizione necessaria e sufficiente perchè due pseudopolinomi siano identici è che siano dello stesso grado e coincidano i coefficienti delle potenze omonime della y".

In base a questo ultimo teorema e procedendo in modo del tutto analogo a quanto si fa in algebra per i polinomi si dimostra agevolmente il teorema: "Se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sono due pseudopolinomi specializzati di grado rispettivamente n ed m, con $n \geq m$ esistono, univocamente determinati altri due pseudopolinomi specializzati, uno, $q(x, y)$, di grado $n - m$ l'altro, $r(x, y)$, di grado non superiore ad $m - 1$ e tali da risultare

$$f(x, y) = g(x, y)q(x, y) + r(x, y).''$$

Se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ non sono pseudopolinomi specializzati, detto A il comune campo di analiticità dei loro coefficienti, il procedimento algebrico indicato porta all'esistenza dei due pseudopolinomi $q(x, y)$ e $r(x, y)$, in ogni campo, contenuto in A e nel quale il primo coefficiente di $g(x, y)$ è privo di zeri. Non vogliamo però insistere su tale argomento, per il nostro scopo è sufficiente dare la nozione di divisibilità di due pseudopolinomi. Uno pseudopolinomio $f(x, y)$, di grado n, lo diremo divisibile, dal punto di vista algebrico, per un altro pseudopolinomio $g(x, y)$, di grado $m \leq n$, se esiste un terzo polinomio, $q(x, y)$, di grado $n - m$ tale che sia identicamente

$$f(x, y) = g(x, y)q(x, y).$$

Abbiamo aggiunto l'espressione "dal punto di vista algebrico" giacchè si dà anche un'altra nozione di divisibilità.

In generale, se $F(x,y)$ e $G(x,y)$ sono due funzioni, simultaneamente analitiche in un campo contenente l'origine, nulle entrambe nella origine cioè $F(0,0) = G(0,0)$ ma nessuna delle due identicamente nulla si dice che una, ad esempio $F(x,y)$ è divisibile per l'altra $G(x,y)$ localmente cioè in un intorno dell'origine, se esiste una terza funzione $Q(x,y)$ analitica in un tale intorno, non nulla nell'origine

$$Q(0,0) \neq 0$$

e tale da risultare identicamente

$$F(x,y) = G(x,y)Q(x,y).$$

Essendo la funzione analitica $Q(x,y)$ non nulla nell'origine, esiste tutto un intorno, nel quale essa è diversa da zero; in tale intorno la funzione

$$P(x,y) = \frac{1}{Q(x,y)}$$

è analitica e non nulla e si ha

$$G(x,y) = F(x,y)P(x,y).$$

Donde segue che l'essere la $F(x,y)$ divisibile per $G(x,y)$, importa che anche $G(x,y)$ è divisibile per $F(x,y)$.

Due funzioni analitiche divisibili nel senso ora definito si dicono "equivalenti" rispetto alla divisione.

È facile persuadersi che, se $F(x,y)$ e $G(x,y)$ sono due pseudopolinomi qualsiasi non specializzati, possono risultare equivalenti; cioè divisibili nel senso analitico secondo l'ultima definizione di divisibilità, senza che risultino divisibili nel senso algebrico.

Può esistere cioè una funzione analitica $Q(x,y)$ in modo da soddisfare localmente alla precedente identità senza che essa sia uno pseudopolinomio. Così ad esempio lo pseudopolinomio

$$F(x,y) = y - x$$

non è affatto divisibile per lo pseudopolinomio

$$G(x,y) = xy^2 - (x^2+1)y + x = (xy-1)(y-x)$$

mentre lo è dal punto di vista analitico nell'intorno dell'origine determinato dalle limitazioni $|x| < 1 \quad |y| < 1$.

Se, invece, ci limitiamo agli pseudopolinomi specializzati, le due definizioni di divisibilità vengono a coincidere.

Si dimostra così il teorema:

"Se $f(x,y)$ e $g(x,y)$ sono due pseudopolinomi specializzati, rispettivamente di grado n ed m, con $n \geq m$, si ha:

1) se $f(x,y)$ è divisibile per $g(x,y)$ lo è necessariamente nel senso algebrico, ossia, se [*sic*] esiste una funzione $q(x,y)$, analitica in un intorno dell'origine e tale da verificare in tale intorno l'identità:

$$f(x,y) = g(x,y)q(x,y) \tag{33}$$

ossia è necessariamente uno pseudopolinomio specializzato di grado $n-m$;

2) lo pseudopolinomio $g(x,y)$ non può essere in alcun modo divisibile per $f(x,y)$". Dimostriamo la prima parte del teorema. Poniamo:

$$f(x,y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + .. + a_n(x); \quad g(x,y) = y^m + b_1(x)y^{m-1} + .. + b_m(x)$$

e supponiamo che esista una funzione $q(x,y)$, analitica in un certo intorno dell'origine, nel quale verifica l'identità (33). Per fissare le idee supponiamo che tale intorno sia determinato dalle limitazioni $|x| < r$; $|y| < \rho$; risulta allora dalla (33)

$$q(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{y^n + a_1y^{n-1} + .. + a_n}{y^m + b_1y^{m-1} + .. + b_m}. \tag{34}$$

I due pseudopolinomi specializzati $f(x,y)$ e $g(x,y)$ soddisfano alle condizioni del teorema preliminare di Weierstrass e, indi, per x contenuto in un intorno dell'origine nel piano dell'origine, lo pseudopolinomio $g(x,y)$ ha m radici, contenute tutte in un intorno dell'origine nel piano delle y. Si può allora determinare un numero positivo $\varepsilon < r$ e piccolo in modo che, per $|x| < r$, gli zeri dello pseudopolinomio siano tutti nell'intorno della origine di raggio ρ nel piano delle y. Ne segue che per $|x| < \varepsilon$ ed $|y| > \rho$ la funzione $g(x, y)$ è analitica e priva di zeri. Di conseguenza, dalla (34) si deduce che $q(x, y)$, supposta analitica per $|x| < r$ ed $|y| < \rho$ lo è anche per $|x| < \varepsilon < r$ ed $|y| > \rho$. In definitiva $q(x, y)$ è una funzione analitica per $|x| < \varepsilon$ ed y qualunque. Essa dunque risulta sviluppabile in una serie di potenze in y:

$$q(x, y) = \gamma_0(x) + \gamma_1(x)y + \gamma_2(x)y^2 + ..$$

convergente in tutto il piano delle y, i cui coefficienti sono funzioni della x, analitiche nel cerchio di centro nell'origine e raggio ε. I coefficienti dei due polinomi $f(x, y)$ e $g(x, y)$, essendo funzioni analitiche di x, sono, nel suddetto cerchio, limitate in modulo. Segue allora dalla (34) che, nel punto all'infinito del piano delle y la funzione $q(x, y)$ ha un infinito di ordine $n - m$ e pertanto la funzione di y: $\frac{q(x,y)}{y^{n-m}}$ risulta regolare all'infinito. Ciò ci assicura che lo sviluppo di $q(x, y)$ in serie di potenze di y si arresta al termine di grado $n - m$, e pertanto $q(x, y)$ è uno pseudopolinomio di grado $n - m$. Poniamo allora

$$q(x, y) = q_0(x)y^{n-m} + q_1(x)y^{n-m-1} + .. + q_{n-m}(x).$$

Sostituendo nella identità (33), eseguendo il prodotto indicato al secondo membro ed uguagliando i coefficienti dello pseudopolinomio che si ottiene con i coefficienti corrispondenti dello pseudopolinomio $f(x, y)$ nel primo membro, si ha prima di tutto $q_0(x) = 1$, dopo di che si hanno le relazioni:

$$a_k = b_k + b_{k-1}q_1 + b_{k-2}q_2 + .. + b_1q_{k-1} + q_k$$

per $k = 1, 2, .., n-m$; dalle quali essendo: $a_1(0) = a_2(0) = .. = a_n(0) = 0$ e $b_1(0) = b_2(0) = .. = b_m(0) = 0$, si deduce che deve ancora risultare: $q_1(0) = q_2(0) = .. = q_{n-m}(0) = 0$, cioè la funzione $q(x, y)$ è uno pseudopolinomio che ha per primo coefficiente l'unità, ed ha gli altri coefficienti funzioni analitiche della x, tutte nulle per $x = 0$. Resta così dimostrata la prima parte del teorema. La seconda parte è di dimostrazione pressocchè immediata. Che $g(x, y)$ non possa essere divisibile per $f(x, y)$ nel senso algebrico è più che evidente, ma non lo può essere nemmeno dal punto di vista analitico. Supponiamo infatti che possa esistere una funzione, $\varphi(x,y)$, analitica in un intorno dell'origine, ma non nulla nell'origine:

$$\varphi(0,0) \neq 0 \tag{35}$$

e tale ancora da verificare identicamente nel suddetto intorno la relazione

$$g(x,y) = f(x,y)\,\varphi(x,y).$$

Essendo verificata la (35), restringendo opportunamente l'intorno dell'origine si può fare in modo che nell'intorno, insieme alla (35), risulti ancora $\varphi(x,y) \neq 0$. Allora, in tale intorno, la funzione $q(x,y) = \frac{1}{\varphi(x,y)}$ risulta analitica e priva di zeri. Dalla (35) si ha inoltre $f(x,y) = g(x,y)q(x,y)$, relazione che non può sussistere, giacchè, in virtù della prima parte del teorema già dimostrato, essa può essere verificata soltanto con $q(x,y)$ pseudopolinomio specializzato, pertanto nullo nell'origine. Data la nozione di divisibilità per gli pseudopolinomi si possono facilmente estendere ad essi i concetti di pseudopolinomi primi, di decomposizione in fattori primi, di discriminante, di risultante, ecc.ecc.

PARTE V - LE SINGOLARITÀ

Usando la terminologia nota dalla teoria delle funzioni di una variabile complessa, diremo "Olomorfa" nell'intorno di un punto P, o, più semplicemente, olomorfa nel punto P, una funzione di più variabili se è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale P. Una funzione si dirà poi olomorfa in un campo se tale è nell'intorno di ogni punto del campo.

È opportuno mettere bene in rilievo fin dal principio che il carattere olomorfo non compete ai singoli punti, bensì agli intorni. Pertanto, quando, ad esempio, si afferma che una funzione $f(x, y)$ è olomorfa per x variabile in un certo campo C del piano della x o per $y = y_0$, deve intendersi che essa è olomorfa nel campo quadrimensionale prodotto di C e di un altro campo costituito da un intorno del punto y_0 nel piano della y. Analogamente dire che la funzione $f(x, y)$ è olomorfa per x variabile su un arco di curva del piano della x equivale ad ammettere che sia olomorfa per x variabile in un certo intorno della curva.[1'] Dopo di che si comprende che cosa debba intendersi quando, qualche volta, si parlerà di funzione olomorfa in un dominio. Diremo "meromorfa" in un punto una funzione, che nell'intorno del punto, si può esprimere come rapporto di due funzioni olomorfe. Se si tratta di un rapporto effettivo, nel senso che la funzione non sia olomorfa, nè, mediante la eliminazione di un fattore, possa ridursi ad una funzione olomorfa, la funzione ha nel punto una singolarità (non essenziale). Il rapporto di due funzioni, ambedue olomorfe in un campo, si dice meromorfo nel campo, ed è evidentemente una funzione olomorfa in ogni punto del campo nel quale non si annulla la funzione al denominatore. I punti del campo, nei quali una tale funzione non è olomorfa sono "punti singolari". I punti, di olomorfia li diremo anche punti regolari ed useremo la espressione: funzione regolare in un punto, in un campo, in luogo dell'altra "funzione olomorfa". Come è noto una funzione di una sola variabile che è meromorfa in un campo, può avere, nel campo stesso, soltanto singolarità polari. Invece per le funzioni meromorfe di due variabili, possono distinguersi due specie

---

[1'] Non è qui il caso di precisare il concetto di tale intorno. Ci si può contentare dell'idea intuitiva, secondo la quale "intorno di un arco di una curva piana" si può chiamare un campo piano, al quale ogni punto dell'arco è interno.

di singolarità (non essenziali): singolarità di prima specie o polari e singolarità di seconda specie. Nell'intorno di un punto singolare di prima specie o polo, la funzione è in modulo divergente. Nell'intorno di un punto singolare di seconda specie o punto di indeterminazione, la funzione non è in modulo limitata, ma non è neanche divergente, potendo, in un intorno comunque ristretto, assumere qualsiasi valore assegnato ad arbitrio. Punto di indeterminazione è, per esempio, l'origine per la funzione di due variabili y/x. Ci siamo già occupati del problema del prolungamento analitico. Vogliamo ora ritornare su tale argomento. Precisamente, il problema sul quale vogliamo ora intrattenerci, nei termini più generali, si può così enunciare: "data una funzione, olomorfa o meromorfa, in un campo C, contenuto in un altro campo γ, definire un'altra funzione, olomorfa o meromorfa in γ, la quale in C coincida con la data". Si parlerà allora di prolungamento olomorfo e di prolungamento meromorfo. In un primo tempo ci occuperemo del prolungamento olomorfo e cominceremo da alcuni teoremi che riflettono ed estendono teoremi sussistenti per le funzioni di una sola variabile. Precisando ancora il nostro compito, diremo che i problemi seguenti consistono nel partire da una funzione olomorfa in un campo, privato di un insieme di dimensioni minori di quello del campo e, sotto opportune ipotesi, prolungare detta funzione in tutto il campo. Problemi simili si possono anche chiamare di riassorbimento delle singolarità da parte del campo di olomorfia. Li diremo anche problemi di eliminazione delle singolarità e parleremo perciò di singolarità eliminabili od apparenti. Attraverso i problemi di riassorbimento saremo portati ad una analisi della distribuzione delle singolarità non apparenti in un campo. Nella dimostrazione dei teoremi ci riferiremo, per semplicità, alle funzioni di due variabili. Le estensioni al caso generale di n variabili non presentano difficoltà di sorta, e pertanto ci contenteremo di dare gli enunciati dei singoli teoremi. Per indicare due variabili complesse useremo in generale, i simboli x ed y come nel capitolo precedente. Qualche volta però ritorneremo ai vecchi simboli z_1, z_2, avendo bisogno di far ricorso alla parte reale ed al coefficiente dell'immaginario delle singole variabili. Ricordiamo il teorema di Weierstrass per le funzioni di una variabile: "Se una funzione è limitata in un campo C ed è olomorfa in C privato di un insieme finito di punti, essa è olomorfa in tutto C". Nell'ipotesi che sia limitata la funzione si lascia perciò prolungare in tutto C, o, come si dice, si lascia, per continuità, definire olomorfa in tutto C, nel senso che in ogni punto dell'insieme finito eccettuato, la funzione ha limite determinato ed, in modulo, finito, che le si attribuisce come valore nel punto, risultando la funzione, così prolungata, olomorfa in C. Nel capitolo III$^{\text{o}}$ ci siamo serviti dell'estensione di questo teorema alle funzioni di più variabili per introdurre il concetto di analiticità di una funzione in un punto all'infinito. Vedremo poi che il teorema per le funzioni di più variabili sussiste anche senza l'ipotesi che la funzione sia limitata in C. Per ora ci basti fare osservare che così come enunciato e esteso formalmente alle funzioni di due variabili il teorema è un caso particolare del seguente:

"Se una funzione, $f(x, y)$, è limitata in un campo C, prodotto di un campo, C_1, del piano delle x e di un campo, C_2, del piano delle y, ed è continua su FC ed olomorfa generalmente in C nel senso che, per ogni fissato valore di y in C_2, risulta funzione della sola x, olomorfa in C_1, fatta eccezione di un insieme finito, variabile con y, essa è olomorfa in tutto C". Fissato y in C, la $f(x, y)$, funzione della sola x è limitata in tutto C_1 ed è olomorfa in C_1, privato di un insieme finito di punti. In virtù del citato teorema di Weierstrass relativo alle funzioni di una variabile, tale funzione è olomorfa in C_1. Essa inoltre è continua su FC_1 e, pertanto qualunque sia x in C_1 è uguale a:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{FC_1} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x} d\xi.$$

Il secondo membro di questa relazione è una funzione di x ed y, evidentemente olomorfa in tutto C. La relazione dunque dimostra il teorema. Le modifiche da apportare all'enunciato del teorema se si prende in considerazione il caso generale delle funzioni di n variabili sono evidenti. Abbiamo detto che nel suddetto teorema è contenuta l'estensione formale del teorema di Weierstrass. A giustificazione dell'attributo "formale" si rifletta che, nel teorema di Weierstrass si suppone la olomorfia della funzione in un campo a due dimensioni privato di un insieme a zero dimensioni, cioè di un insieme chiuso avente due dimensioni meno del campo. Sotto questo aspetto, volendo estendere il teorema alle funzioni di due variabili, bisogna postulare l'olomorfia in un campo, a quattro dimensioni, ad eccezione di un insieme chiuso a due dimensioni. Ed infatti sussiste il teorema: "Se una funzione di due variabili, $f(z_1, z_2)$, è limitata in un campo C dello spazio a quattro dimensioni, è olomorfa in C ad eccezione di un insieme chiuso, contenuto in C, e costituente una superficie regolare, nel senso ordinario, ed infine è continua su FC, essa è olomorfa in tutto C". Una superficie regolare nello spazio a quattro dimensioni viene assegnata o mediante una sola equazione complessa, la quale dà una delle due variabili in funzione dell'altra, oppure mediante due equazioni reali, dando cioè due delle quattro variabili reali in funzione delle altre due; per esempio da due equazioni del tipo: $x_1 = \varphi(x_2, y_2)$ $y_1 = \psi(x_2, y_2)$ con $(x_2, y_2) \in D_2$ e φ e ψ definite in D_2, del piano delle z_2, interno a C_2, ivi dotate di derivate continue, come già più volte spiegato. Le ipotesi del teorema ci assicurano che, per ogni z_2, contenuto in C_2, la funzione $f(z_1, z_2)$ è olomorfa in C, ad eccezione di un punto solo, qualora z_2 è in D_2, cioè del punto $(\varphi(x_2, y_2), \psi(x_2, y_2), x_2, y_2)$ della superficie. Inoltre la funzione, per ipotesi, è ancora limitata. In virtù del teorema precedente essa è olomorfa in tutto C. L'ipotesi essenziale per la precedente dimostrazione è che la superficie eccettuata sia tale che ad ogni punto, z_2, di C_2 sia associato un numero finito di punti di essa superficie. Tale numero finito si riduce ad uno, nell'ipotesi nella quale ci siamo posti, che, cioè, la superficie sia regolare, nel senso spiegato, oppure che sia addirittura una superficie caratteristica avente equazione esplicita del tipo $z_1 = g(z_2)$. Il teorema si estende facilmente al caso generale delle funzioni di n variabili e si enuncia come segue: "Se una funzione di n variabili complesse è limitata in un campo C dello spazio a $2n$ dimensioni ed è olomorfa in C, ad eccezione di un insieme chiuso di punti, costituenti una varietà regolare a $2(n-1)$ dimensioni, ed è infine continua su FC, essa è olomorfa in tutto C". Per le funzioni di una variabile sussiste il teorema: "Se una funzione è continua in un campo C ed è olomorfa in C, ad eccezione dei punti di una curva regolare interna a C, essa è olomorfa in tutto C". In questo teorema si postula la olomorfia della funzione in tutto un campo, privato di un insieme chiuso, costituente una curva regolare, ossia un insieme avente una dimensione di meno del campo. Per le funzioni di n variabili il teorema è pertanto il seguente: "Se una funzione di n variabili è continua in un campo C a $2n$ dimensioni ed è olomorfa in C ad eccezione dei punti di un insieme chiuso costituente una varietà regolare a $2n-1$ dimensioni, essa è olomorfa in tutto C". Al solito limitiamo le nostre considerazioni alle funzioni di due variabili, per le quali il campo C è quadrimensionale e la varietà eccettuata è tridimensionale. Si tenga presente che, nello spazio a quattro dimensioni, l'intersezione di un piano con una varietà regolare a tre dimensioni, è una varietà ad una dimensione, cioè una curva regolare. Se dunque

(x_0, y_0) è un punto della varietà eccettuata il piano caratteristico $y = y_0$ interseca il campo C in un campo piano, nel quale la funzione è olomorfa, ad eccezione che nei punti della curva intersezione del piano con la varietà. Essa dunque, in virtù del precedente teorema sulle funzioni di una variabile, si lascia, per continuità, definire olomorfa in tutto il campo piano. Lo stesso dicesi per il campo di intersezione del campo C col piano caratteristico di equazione $x = x_0$. In tal modo, facendo variare i piani caratteristici, mantenendoli però paralleli alle prime posizioni, la funzione si prolunga in tutto il campo C. Veniamo ora al teorema di Hartogs: "Se, essendo C_1 e C_2 due campi nei piani rispettivamente delle x e delle y, ed H un campo contenuto in C_2, la funzione soddisfa alle seguenti ipotesi: (funzione $= f(x, y)$)

a) è olomorfa nel campo prodotto CH e continua sulla frontiera.

b) per ogni x di FC_1 è funzione olomorfa di y in tutto C_2,

essa è olomorfa in tutto il campo C prodotto di C_1 e C_2".

In virtù della prima ipotesi si ha nel campo C_1H:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{FC_1} \frac{f(\xi, y)}{\xi - x} d\xi.$$

Per la seconda ipotesi, la funzione: $\frac{f(\xi,y)}{\xi-x}$ per ξ su FC_1, è funzione olomorfa di x ed y in tutto C. Il secondo membro della precedente relazione rappresenta dunque una funzione olomorfa in tutto C, la quale coincide con la data nel campo a quattro dimensioni C_1H, contenuto in C, ne è il prolungamento in tutto C. Come conseguenza di questo teorema si deducono le prime considerazioni sulla distribuzione delle singolarità non apparenti. Sia $f(x, y)$ una funzione olomorfa per $y = y_0$ ed x contenuto in un certo campo C_1, escluso un insieme chiuso totalmente interno a C_1, nei punti del quale la funzione presenti delle singolarità. Diciamo D_1 un dominio contenuto in C_1 e contenente nell'interno il suddetto insieme di punti singolari, dominio certamente esistente. Posto $\overline{C}_1 = C_1 - D_1$, la funzione $f(x, y)$ risulta olomorfa per $y = y_0$ ed x variabile nel campo $\overline{C}_1$. Il carattere olomorfo, come già abbiamo notato, è un carattere locale e compete perciò a tutto un intorno a quattro dimensioni. Esisteranno pertanto dei valori, ε, tali che la funzione $f(x, y)$ risulta ancora olomorfa per $y = y_0 + \varepsilon$ ed x variabile in $\overline{C}_1$, frontiera di D_1 inclusa. Diciamo r

l'estremo superiore dei moduli di tali numeri ε. Orbene una funzione $f(x,y)$, per $y = y_0+\varepsilon$, essendo ε un qualsiasi numero minore in modulo di r, non può essere olomorfa in tutto C_1, ma dovrà necessariamente presentare delle singolarità internamente a tale campo. E difatti, una volta fissato ε, di modulo minore di r, diciamo ρ un qualsiasi numero positivo compreso tra $|\varepsilon|$ ed r: $|\varepsilon| < \rho < r$ e chiamiamo D_2 il dominio circolare di centro y_0 e raggio ρ nel piano delle y. La funzione è olomorfa per $y \in D_2$ ed x variabile in $\overline{C}_1 + FD_1$, giacchè i punti singolari sono interni a D_1. Se per $y = y_0 + \varepsilon$ la funzione fosse olomorfa anche nel campo dei punti interni a D_1 cioè in tutto C_1, lo stesso dovrebbe avvenire per y contenuto in un opportuno dominio circolare di centro nel punto $y_0 + \varepsilon$ ed interno a D_2. Diciamo H un tale dominio. Dunque la funzione risulta olomorfa nel dominio prodotto di D_1 ed H. D'altra parte, essa è ancora olomorfa per $y \in D_2$ ed x variabile sulla frontiera di D_1 come già abbiamo osservato. Ne segue che, relativamente al campo dei punti interni al dominio prodotto D_1D_2 la funzione soddisfa alle ipotesi del teorema di Hartogs. Essa pertanto è analitica in tutto il campo, ciò che è contro l'ipotesi della presenza di punti singolari interni a D_1 per $y = y_0$. Possiamo dunque enunciare il teorema: "Se la funzione $f(x,y)$ per $y = y_0$ presenta singolarità costituenti un insieme chiuso interno ad un certo campo C_1 del piano delle x, singolarità cioè interne a C_1 insieme ai loro eventuali punti di accumulazione, esisterà tutto un intorno del punto y_0 nel piano delle y tale che, per y contenuto in tale intorno, la funzione presenta ancora singolarità interne a C_1". In altri termini, se nel piano caratteristico di equazione $y = y_0$ la funzione presenta delle singolarità, facendo variare con continuità il piano, mentenendolo però sempre parallelo, le singolarità non scompaiono istantaneamente, ma si conservano per tutto un intorno di y_0. Per questa ragione il teorema si chiama: "Teorema della continuità delle singolarità". Da esso segue immediatamente che: "Se $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n ....$ è una successione di numeri complessi tendenti a zero, e se, per $y_i = y_0 + \varepsilon_i$ per $i = 1, 2, .., n..$ la $f(x,y)$ non presenta singolarità, non ne potrà presentare neanche per $y = y_0$". Se ne deduce che: "L'insieme delle singolarità è per lo meno bidimensionale". Il teorema della continuità delle singolarità ci permette di impostare ancora un altro teorema sulla eliminazione delle singolarità apparenti giacchè da esso si deduce facilmente che: "Le singolarità non apparenti di una funzione di due variabili non possono distribuirsi lungo una curva". In altri termini sussiste il teorema: "Se una funzione $f(x, y)$ è olomorfa in un campo fatta eccezione dei punti di una curva, tutta interna al campo, essa è olomorfa in tutto il campo". Per persuadersi che questo teorema è un corollario immediato del teorema della continuità delle singolarità basta considerare che se un piano caratteristico $y = y_0$ ha un punto in comune con la curva non esiste affatto un intorno di y tale che, qualunque sia il piano caratteristico $y = y_0 + \varepsilon$ esso interseca ancora la curva.[1′] Si noti che l'unica ipotesi del teorema è che la funzione sia olomorfa nel campo privato dei punti della curva. L'insieme dei punti della curva è un insieme avente numero di dimensioni minore di tre del numero di dimensioni del campo. Il teorema non ha riscontro nel campo delle funzioni di una sola variabile. Passando al caso generale delle funzioni di n variabili il teorema si estende con facilità. L'ipotesi da farsi è che le singolarità formino un insieme di dimensioni uguali o minori di $2n - 3$. Ponendoci sempre nell'ipotesi che l'insieme eccettuato formi una varietà regolare, il teorema si enuncia: "Se una funzione di n variabili è olomorfa in un campo a $2n$ dimensioni, privato dei punti di una varietà regolare a $2n - k$ dimensioni, con $k > 3$, totalmente interna al campo, essa è olomorfa in tutto il campo". Come caso particolare si ha il seguente teorema: "Una funzione di più variabili non può ammettere singolarità isolate". Cioè: "Una funzione olomorfa in un campo privato di un numero finito di punti è olomorfa in tutto il campo". Come dunque

[1′] Indichiamo con z_1 e z_2 le due variabili. Una curva dello spazio a quattro dimensioni è rappresentata da un sistema di quattro equazioni parametriche: $x_1 = x_1(t)$; $y_1 = y_1(t)$; $x_2 = x_2(t)$, $y_2 = y_2(t)$. Poniamo: $z_2^0 = x_2^0 + y_2^0 i$, $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$. L'avere il piano caratteristico $z_2 = z_2^0$ un punto comune con la curva importa l'esistenza di un valore, t_0, del parametro t, per il quale si ha:

$$x_2(t_0) = x_2^0; \quad y_2(t_0) = y_2^0.$$

Ammettere l'esistenza di un certo numero positivo, r, tale che qualunque sia ε, minore in modulo di r, il piano caratteristico $z_2 = z_2^0 + \varepsilon$ abbia un punto di intersezione con la curva equivale ad ammettere, per ogni valore di ε l'esistenza di un valore, t_r, del parametro t tale da aversi

$$x_2(t_r) = x_2^0 + \varepsilon' \quad ; \quad y_2(t_r) = y_2^0 + \varepsilon''$$

ciò che evidentemente è un assurdo.

avevamo annunziato il teorema da noi applicato nel terzo capitolo per definire una funzione analitica all'infinito, sussiste in ipotesi più generali, senza cioè l'ipotesi che la funzione sia limitata. Ricapitoliamo nel seguente quadro tutti i precedenti teoremi di riassorbimento:

Insiem formato dalle singolarità apparenti.			Ipotesi sulla funzione in tutto il campo.
Caso di una variabile.	caso di due variabili.	caso di n variabili.	
Curva regolare	Varietà a 3 dimensioni.	Varietà a 2n-1 dim.	Continuità
Insieme finito	Superficie regolare.	Varietà a 2n-2 dim.	Limitatezza
	Curva regolare, insieme finito.	Varietà a 2n-k dimensioni, con k > 3.	

Ritornando al teorema della continuità delle singolarità e comprendendo nelle nostre considerazioni anche l'infinito; in luogo dei piani caratteristici di equazione:

$$y = y_0 \quad (\text{oppure } x = x_0) \tag{1}$$

possiamo parlare di retta del piano proiettivo complesso, oppure, volendo riportare tutto al finito sulla varietà di Segre, parleremo di ellissoide sulla varietà di Segre.

Il teorema di continuità afferma dunque che se sulla retta del piano proiettivo complesso di equazione (1) la funzione $f(x, y)$ ha punti singolari, essa avrà punti singolari su ogni retta prossima e parallela cioè su ogni retta di equazione $y = y_0 + \varepsilon$ con ε opportunamente piccolo in modulo. Se invece di rette parallele consideriamo rette prossime ma di equazione generica $y = y_0 + \varepsilon + \sigma x$, con ε e σ sufficientemente piccoli in modulo, basta considerare che ogni retta di tale tipo ha con la retta di equazione (1) un punto comune. Se questo punto è regolare per la funzione, si può, con una trasformazione opportuna, mandare tale punto all'infinito. Con tale trasformazione le due rette si trasformano in due rette sempre prossime, ma parallele e, pertanto, ad esse è applicabile il risultato del teorema di continuità. In definitiva, riferendoci alla rappresentazione del piano complesso sulla varietà di Segre tutta al finito, possiamo in generale affermare: "Se sopra un ellissoide della varietà di Segre cade un insieme, I, di punti singolari di una funzione, sopra ogni ellissoide sufficientemente prossimo, cadrà un insieme di punti singolari, la cui distanza dallo insieme I è arbitrariamente piccola". A questo risultato se ne può aggiungere un altro che ci dà un'idea più precisa sulla struttura dell'insieme dei punti singolari di una funzione di più variabili. Nella teoria delle funzioni analitiche di una variabile si è visto come sia possibile l'esistenza di funzioni aventi delle lacune, come si possa cioè costruire una funzione che sia singolare in tutti i punti di un dominio limitato da una curva regolare e chiusa, tutta al finito. Siamo in grado ora di dimostrare che ciò non è possibile affatto per le funzioni analitiche di più variabili? Possiamo cioè dimostrare che una funzione di più variabili, non soltanto non può avere singolarità isolate, oppure un insieme di punti singolari formanti una curva regolare, ma addirittura non può ammettere un insieme di punti singolari isolato; isolato, cioè, come insieme, nel senso che possa venire racchiuso in una varietà tutta al finito e sulla quale la funzione sia regolare. La verità di questa affermazione si deduce dal seguente teorema di Hartogs: "Se, nello spazio a quattro dimensioni, una varietà V, tridimensionale, è la frontiera di una porzione, T, limitata di spazio, e se su V la funzione $f(x, y)$ è olomorfa, essa è prolungabile in tutto T". Richiamiamo l'attenzione ancora una volta sul fatto che dire una funzione di due variabili olomorfa su una varietà tridimensionale equivale ad affermare l'olomorfia in un intorno della varietà, ossia in un certo campo quadrimensionale, al quale la varietà sia totalmente interna. Tenendo conto di ciò, possiamo supporre la varietà regolare e prendere un piano caratteristico che abbia almeno un punto sulla varietà, ma nessun punto comune con T. Inoltre senza ledere la generalità, possiamo supporre che un tale piano sia di equazione del tipo $x = x_0$. Consideriamo allora i piani caratteristici di equazione:

$$x = x_0 + \varepsilon \tag{2}$$

con ε tale che il piano corrispondente abbia i punti nel campo T. Si rifletta anzi che a questo scopo basta supporre ε reale, cioè basta far subire al piano spostamenti reali in un certo verso. Se in T esistesse un insieme, I, di punti singolari per la funzione $f(x, y)$, dovrebbe esistere per lo meno un valore di ε tale che il piano relativo incontra tale insieme in I. D'altra parte I è tutto interno al campo T limitato dalla varietà V, sulla quale la funzione è supposta regolare. Esso poi è un insieme necessariamente chiuso. Se quindi diciamo r

l'estremo superiore dell'insieme dei moduli dei numeri ε tali che i piani caratteristici (2) non abbiano punti comuni con I, insieme certamente non vuoto esisterà un numero, ε_0, con $|\varepsilon_0| = r$, tale che il piano:

$$x = x_0 + \varepsilon_0 \tag{3}$$

abbia punti comuni con I. Ora ciò è palesemente contro il teorema della continuità, perchè sul piano caratteristico di equazione (3) esisterebbero punti singolari per la funzione, mentre ogni piano di equazione (2) con $|\varepsilon| > |\varepsilon_0|$ sarebbe privo di tali punti. Il teorema si estende immediatamente al caso generale delle funzioni di n variabili. Le modifiche da apportare all'enunciato in tal caso sono evidenti, perciò ci dispensiamo dal ripetere qui l'enunciato completo. Osserviamo ora che, perchè un dominio dello spazio a quattro dimensioni abbia per contorno una varietà, V, tutta al finito è necessario e sufficiente che esista una retta del piano proiettivo complesso la quale non abbia punti comuni. In tal caso infatti si può operare una trasformazione che porta tale retta all'infinito. Il dominio resta tutto al finito. Possiamo dunque dire: "Se una funzione è olomorfa [in *n.d.c.*] una varietà tridimensionale, limite di una porzione, T, di spazio a quattro dimensioni, non avente punti comuni con una retta del piano proiettivo complesso, essa è olomorfa in tutto il campo T". Ne segue: "l'insieme di singolarità di una funzione ha punti comuni con ogni retta del piano proiettivo complesso". Riferendoci alla varietà di Segre tutta al finito, il risultato si traduce nelle seguenti proposizioni: "Se una funzione è olomorfa sul contorno di un campo della varietà di Segre non avente punti comuni con un ellissoide della varietà, essa è olomorfa in tutto il campo". "L'insieme dei punti singolari di una funzione sulla varietà di Segre ha punti comuni con ogni ellissoide della varietà". Come si vede questo teorema ci dà effettivamente un'idea molto più precisa sulla struttura dello insieme delle singolarità. Una ulteriore precisazione è contenuta in un risultato dovuto al Caccioppoli [R. Caccioppoli, *Sulla distribuzione delle singolarità delle funzioni di due variabili complesse*, Atti del I Congresso dell'U.M.I. (1937) 183-186; ripubblicato in Opere Scelte, U.M.I., articolo 60, pp. 174-177 *n.d.c.*], secondo il quale l'insieme delle singolarità costituisce un continuo. Ma per giungere a questo risultato occorrerebbero strumenti ben più elevati e potenti, che purtroppo noi non possediamo. Come conseguenza del teorema di Hartogs si deducono le prime considerazioni sulla distribuzione delle singolarità non apparenti. Sia $f(x,y)$ una funzione olomorfa per $y = y_0$ ed x variabile in un certo campo C_1, escluso un insieme chiuso, totalmente interno a C_1 nei punti del quale la funzione presenti delle singolarità. Diciamo D_1 un dominio contenuto in C_1 e al quale il suddetto insieme di punti singolari è completamente interno, dominio certamente esistente. Posto allora $\overline{C}_1 = C_1 - D_1$, la funzione $f(x,y)$ risulta olomorfa per $y = y_0$ ed x variabile in $\overline{C}_1 + FD_1$. Il carattere olomorfo, come abbiamo già fatto notare, è un carattere locale e compete a tutto un intorno quadrimensionale. Si potrà pertanto determinare un intorno di y_0, diciamolo γ, tale che la funzione risulta olomorfa per $y \in \gamma$ ed $x \in \overline{C}_1 + FD_1$. Dunque teniamo presente che:

a) per x contenuto su FD_1 la $f(x,y)$ è olomorfa in tutto γ.

Vogliamo ora far vedere che come la $f(x,y)$ non è olomorfa in tutto C_1 per $y = y_0$, altrettanto deve accadere per ogni y di γ. Supponiamo infatti che, essendo il punto $y_0 + \varepsilon$ in γ, la funzione sia olomorfa, per $y = y_0 + \varepsilon$, ed x variabile in tutto C_1, quindi anche in D_1, che è compreso in C_1. Dato il carattere locale dell'olomorfia si determinerà un intorno H, del punto $y_0 + \varepsilon$, tutto interno a γ, e tale che la funzione è olomorfa per $x \in D_1$ ed $y \in H$. Si ha dunque ancora:

b) la $f(x,y)$ è olomorfa nel campo prodotto D_1H.

Le due proposizioni a) e b) esprimono, che rispetto al campo prodotto $D_1\gamma$ sono verificate le ipotesi del teorema di Hartogs. La $f(x,y)$ è dunque olomorfa in tutto D_1H, ciò che è contro l'ipotesi della presenza dei punti singolari interni a D_1 per $y = y_0$. Possiamo dunque enunciare il teorema ..... ecc.ecc..

Veniamo ora alle funzioni meromorfe e cominciamo dal teorema di Hartogs la cui estensione è contenuta nel seguente teorema di Levi: "Sia C un campo dello spazio a quattro dimensioni, prodotto di due campi, C_1 del piano della x e C_2 del piano della y; sia inoltre H un campo piano interno a C_1. Se la funzione $f(x,y)$ soddisfa alle seguenti ipotesi: a) è meromorfa nel campo prodotto HC_2. b) È olomorfa per y contenuto in FC_2 ed x variabile in C_1, essa è meromorfa in tutto il campo C". In virtù della seconda ipotesi la funzione di x ed y $\int_{FC_2} \frac{f(x,\eta)}{\eta - y} d\eta$ è olomorfa in tutto il campo C. Prendiamo in considerazione la differenza:

$$f(x,y) - \frac{1}{2\pi i}\int_{FC_2} \frac{f(x,\eta)}{\eta - y} d\eta \equiv F(x,y).$$

Teniamo presente che la seconda ipotesi del teorema importa l'olomorfia di $f(x,y)$ nel campo quadrimensionale prodotto di C_1 e di un intorno di FC_2. Una volta determinato un tale intorno indichiamo con I la parte di esso interna a C_2, parte che costituisce evidentemente un campo. La suddetta funzione $F(x,y)$ risulta allora olomorfa nel campo $C_1 I$, meromorfa nel campo HC_2. Perchè il nostro teorema risulti dimostrato basta far vedere che la $F(x,y)$ ammette il prolungamento meromorfo in tutto il campo C. Intanto, pur di restringere opportunamente H, possiamo supporre che questo campo sia tale che la $f(x,y)$, meromorfa in HC_2, risulti, per ogni fissato valore di x in H, funzione meromorfa della sola y in C_2. D'altra parte, dalla teoria delle funzioni di una sola variabile, è noto che la differenza che definisce la $F(x,y)$, per x fissato, equivale alla somma delle parti caratteristiche della funzione della sola y, $F(x,y)$ relative ai poli contenuti in C_2. Pertanto possiamo affermare che la $F(x,y)$, per ogni x fissato in H, è uguale alla somma di frazioni semplici e quindi ad una frazione razionale:

$$F(x,y) = \frac{a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + ... + a_n}{y^m + b_1 y^{m-1} + ... + b_m}.$$

Naturalmente i coefficienti dei due polinomi sono funzioni della x in H. Supponiamo la funzione irriducibile in ogni x. Dobbiamo considerare variabili con la x anche i due numeri m ed n. Essi possono però assumere soltanto valori interi. La coppia (m,n) varia perciò in un insieme numerabile al variare della x in un continuo. Si deduce da ciò l'esistenza di almeno una particolare coppia (m,n) che deve corrispondere ad un insieme, $H' \subset H$, di infiniti valori della x. Possiamo sempre supporre che i punti di accumulazione di H' siano contenuti in H.[1'] Per x variabile in H' i due numeri interi m ed n risultano dunque costanti ed i coefficienti $a_0, a_1, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$, funzioni della x, e sussiste l'identità:

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + ... + a_n = F(x,y)(y^m + b_1 y^{m-1} + ... + b_m) \tag{4}$$

[1'] Si può addirittura supporre che H sia un dominio.

la quale permette di determinare i coefficienti. Si potranno infatti assumere, in C_2, $n+m+1$ valori della y tali che il sistema di equazioni nelle a_i e b_i, che si deducono dalla (4), permettono di determinare tali quantità in funzione della x. Qualora ciò non fosse possibile sussisterebbe tra i coefficienti della (4) una relazione lineare a coefficienti indipendenti dalla y, e per ogni x, ciò che è contro l'ipotesi della irriducibilità della frazione. I suddetti $n+m+1$ valori della y: $y_1, y_2, ..., y_{n+m+1}$, li possiamo anzi scegliere nel campo I. I coefficienti a_i e b_i vengono ad essere determinati come funzioni razionali di $F(x, y_i)$. Ma questa quantità, per la particolare scelta delle y_i sono funzioni della x, olomorfe in tutto C_1, dunque i suddetti coefficienti sono razionalmente determinati mediante funzioni olomorfe in tutto C_1, $a_0 = a_0(x), a_1 = a_1(x), ..., a_n = a_n(x), b_1 = b_1(x), b_2 = b_2(x), ..., b_m = b_m(x)$; e l'identità (4) supposta verificata per $x \in H'$ ed $y \in C_2$, risulta verificata per $x \in C_1$ ed $y \in C_2$. Pertanto la relazione:

$$F(x,y) = \frac{a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + ... + a_n(x)}{y^m + b_1(x)y^{m-1} + ... + b_m(x)}$$

definisce $F(x,y)$ come funzione meromorfa in tutto C. Da questo teorema si possono dedurre conseguenze analoghe a quelle dedotte dal teorema di Hartogs nel caso delle funzioni olomorfe. Cominciamo con l'osservare che anche il carattere meromorfo è un carattere locale, giacchè una funzione meromorfa non è altro che il rapporto di due funzioni olomorfe. Supponiamo allora che $f(x,y)$ sia una funzione meromorfa per $y = y_0$ ed x variabile in un campo C_1, fatta eccezione di un insieme chiuso di punti, tutto interno a C_1, punti che naturalmente costituiscono singolarità essenziali. Si può far vedere che le singolarità ci saranno anche internamente a C_1 per $y = y_0 + \varepsilon$, con ε opportunamente piccolo in modulo. Intanto osserviamo che essendo la funzione meromorfa in C_1 per $y = y_0$ si può sempre supporre regolare su FC_1. Qualora ciò non fosse si può sostituire al campo C_1 un altro campo, contenuto in C_1, e tale che la sua frontiera non contenga poli della funzione $F(x,y)$. Diciamo D_1 un dominio totalmente interno a C_1, e comprendente nel suo interno l'insieme dei punti singolari, e pertanto poniamo $\overline{C}_1 = C_1 - D_1$. Nel campo $\overline{C}_1$ la $f(x,y)$ risulta allora meromorfa, e quindi, dato il carattere locale, esisterà un intorno del punto y_0, nel piano della y tale che essa è ancora meromorfa per y in tale intorno ed x in $\overline{C}_1$.

Inoltre, essendo la funzione, per $y = y_0$ regolare su FC_1, si può facilmente vedere che esisterà un intorno di y_0 tale che la funzione è ancora regolare per $x \in FC_1$ e y variabile in tale intorno. Orbene, dei due intorni di y_0, così determinati, prendiamo in considerazione quello di raggio più piccolo e diciamolo C_2. Dunque la nostra funzione è meromorfa in $\overline{C}_1 C_2$ ed è olomorfa per x variabile su FC_1 e y in C_2.

Sia ε un numero tale che il punto $y_0+\varepsilon$ risulti interno a C_2. Vogliamo far vedere che, per $y = y_0+\varepsilon$, la funzione $f(x, y)$ non può risultare meromorfa in tutto C_1. Se risultasse meromorfa in tutto C_1, dato il sopranotato carattere locale, esisterebbe un intorno, diciamolo H, di $y_0 + \varepsilon$, totalmente interno a C_2 e tale che, per $y \in H$, la funzione risulterebbe olomorfa in tutto C_1. La funzione pertanto verrebbe a soddisfare alle seguenti ipotesi: meromorfa nel campo C_1H, olomorfa per $x \in FC_1$ ed y in C_2. In virtù del teorema di Levi essa risulterebbe olomorfa in tutto il campo C_1 C_2, ciò che è contro la ipotesi della presenza delle singolarità essenziali sul piano caratteristico $y = y_0$. Abbiamo così esteso alle singolarità essenziali un teorema della continuità:

Se la funzione $f(x, y)$, per $y = y_0$, ha un insieme chiuso di singolarità essenziali, insieme ad un campo C_1 esiste un intorno di y_0 tale che per y contenuto in tale intorno, la funzione presenta ancora singolarità essenziali insieme a C_1. Tale teorema con linguaggio geometrico si può anche enunciare come segue:

"se sul piano caratteristico $y = y_0$ esiste un insieme I chiuso di singolarità essenziali per la funzione $f(x, y)$, sopra ogni piano caratteristico prossimo, ossia sopra ogni piano $y = y_0 + \varepsilon$ con ε sufficientemente piccolo in modulo, esisterà un insieme di singolarità essenziali arbitrariamente prossimo all'insieme I".[1′]

[1′] Ricordiamo la definizione di distanza di due insiemi. Se A e B sono due insiemi dello spazio ad n dimensioni prendiamo un punto X in A ed uno Y in B e consideriamo la loro distanza XY. Essa è un numero non negativo e pertanto al variare di X in A ed Y in B, indipendentemente l'uno dall'altro essa descrive un insieme di numeri H limitato inferiormente. L'estremo inferiore di tale insieme numerico dicesi distanza dei due insiemi A e B. Se questi due insiemi sono chiusi evidente che risulterà chiuso interiormente [inferiormente *sic*] anche l'insieme numerico H e pertanto la distanza di A e B è data dal minimo di H.

Da questo teorema si deduce che una funzione non può avere singolarità essenziali isolate, oppure costituenti una linea regolare. Ragionando allo stesso modo che nel caso olomorfo tenendo soltanto conto di un'osservazione precedente, che cioè se una funzione $f(x,y)$ è meromorfa per $y = y_0$ e se in un certo campo C_1 si può sempre supporre regolare su FC_1, si deduce che "le singolarità essenziali non possono formare un insieme chiuso tutto al finito".

Cioè: "Se una funzione è meromorfa su una varietà a tre dimensioni, frontiera di una porzione T limitata di spazio essa è meromorfa in tutta T".

Le funzioni meromorfe non possono perciò avere delle lacune. Da questo risultato si deduce che è errata un'affermazione di Weierstrass, il quale opinò che un qualsiasi campo a quattro dimensioni potesse essere il campo di esistenza di una funzione meromorfa e che perciò le singolarità essenziali potessero costituire un insieme chiuso qualunque.

Alle singolarità essenziali possono ancora estendersi tutti i risultati precedentemente ottenuti sulle singolarità non essenziali e perciò si può affermare: "L'insieme delle singolarità essenziali di una funzione ha necessariamente punti comuni con ogni retta del piano proiettivo complesso o ciò che è lo stesso, con ogni piano caratteristico o anche, se si vuole, con ogni ellissoide della varietà di Segre". Segue: "Una funzione meromorfa su un piano caratteristico è meromorfa in tutto lo spazio". Il teorema di continuità che come ora abbiamo dimostrato vale anche per le singolarità essenziali e suscettibili di un'estensione degna di essere posta in rilievo per gli inferiori [ulteriori *n.d.c.*] sviluppi della teoria. Si è dunque stabilito per ogni genere di singolarità non apparenti il teorema:

"Se sopra un piano caratteristico $y = y_0$ esiste un insieme I di punti singolari per la funzione $f(x,y)$, sopra ogni piano caratteristico prossimo, ossia sopra ogni piano caratteristico $y = y_0 + \varepsilon$ con ε sufficientemente piccolo in modulo, esiste un insieme di punti singolari, avente distanza arbitrariamente piccola dall'insieme I". Tale teorema sussiste in generale per le funzioni di n variabili. L'estensione alla quale ci riferivamo si ottiene considerando varietà caratteristiche in luogo di piani caratteristici. Supponiamo di avere un insieme semplicemente infinito di varietà caratteristiche dipendenti linearmente da un parametro λ. Sussiste il seguente teorema:

“Se sopra una varietà caratteristica corrispondente ad un valore λ_0 del parametro, esiste un insieme di punti singolari per una certa funzione, esisterà un insieme di punti singolari, avente distanza arbitrariamente piccola dal detto insieme, sopra una varietà caratteristica prossima ossia sopra ogni varietà caratteristica che corrisponde al valore $\lambda_0 + \varepsilon$ del parametro, con ε sufficientemente piccolo in modulo”.

Avendo enunciato il teorema in questa forma così generale, vogliamo ora illustrarlo riferendoci alle superficie caratteristiche dello spazio a quattro dimensioni e limitandoci a considerare la presenza di un punto singolare anziché di un insieme. Consideriamo la schiera semplicemente infinita di superficie caratteristiche di equazione $g(x, y) = \lambda$ essendo λ un parametro e $g(x, y)$ una funzione olomorfa. Indichiamo con S_λ la superficie corrispondente al valore λ del parametro. Supponiamo che [su *n.d.c.*] una delle superficie, per esempio sulla S_0, esista un punto singolare della funzione $f(x, y)$, punto che, senza ledere generalità possiamo identificare con l'origine.

Supponiamo ancora che l'origine sia un punto regolare per la superficie, secondo le nozioni acquisite nel capitolo precedente nel senso cioè che almeno una delle due derivate parziali $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ sia diversa da zero nel punto. Per fissare le idee supporremo che la derivata rispetto alla x non sia nulla. Sotto questa ipotesi, la trasformazione

$$X = g(x, y) \;\text{ e }\; Y = y \tag{5}$$

che conserva le origini è nell'intorno di questo punto una trasformazione pseudoconforme. Si ha infatti

$$\left[\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}\right]_{x=0, y=0} = \left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]_{x=0, y=0} \neq 0.$$

Dalle (5) si possono ottenere x e y in funzione di X ed Y:

$$x = \varphi(X, Y) \;\; , \;\; y = \psi(X, Y)$$

con φ e ψ funzioni olomorfe. Mediante tale trasformazione, alla $f(x, y)$ corrisponde una funzione di X ed Y

$$F(X, Y) = f[\varphi(X, Y), \psi(X, Y)]$$

la quale, data l'olomorfia di X ed Y, risulta regolare o meno in un punto (X, Y) secondo che il punto (x, y) corrispondente è regolare o singolare per la $f(x, y)$. Dunque, la trasformazione invertibile definita dalla (2) trasforma superficie caratteristiche in superficie caratteristiche, punti singolari di $f(x, y)$ in punti singolari per la funzione trasformata e viceversa. La superficie S_0 si trasforma evidentemente nel piano caratteristico di equazione $X = 0$ nel quale perciò viene a trovarsi un punto singolare per $F(X, Y)$, la origine. Ne segue che questa funzione ha almeno un punto singolare prossimo all'origine per ogni piano caratteristico $X = \varepsilon$ con ε sufficientemente piccolo in modulo. Ma tale piano è il trasformato della superficie S_ε del [e il *sic*] suddetto punto singolare per $F(X, Y)$ ha per corrispondente un punto di S, prossimo all'origine e singolare per $f(x, y)$, dunque sussiste la tesi affermata dal teorema. Siamo ora in grado di dire qualche parola su di un importante problema.

Ci si pone la domanda se una ipersuperficie può essere la frontiera naturale del campo di esistenza di una funzione analitica, olomorfa o meromorfa, nel senso che essa risulta composta di punti singolari della funzione la quale sia definita in un campo avente per frontiera la ipersuperficie e non possa essere prolungata oltre. Accenneremo alla soluzione del problema in piccolo, cioè localmente, nell'intorno di [un *n.d.c.*] punto della ipersuperficie, giacchè il problema in grande attende ancora la soluzione. Ci riferiremo a ipersuperficie doppiamente regolari. Cioè, se indichiamo con $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ l'equazione della ipersuperficie, avendo posto

$$x = x_1 + ix_2 \qquad y = y_1 + iy_2$$

faremo l'ipotesi che la funzione $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ sia dotata di derivate prime e seconde e le derivate prime non siano simultaneamente nulle. Osserviamo subito che nell'intorno di [un *n.d.c.*] punto della ipersuperficie si possono distinguere due campi, che hanno per comune frontiera la ipersuperficie, il campo dei punti nei quali è $y > 0$ e quello dei punti nei quali è $y < 0$. Ci si domanda dunque se può esistere in uno dei due campi una funzione analitica della quale non sia possibile effettuare il prolungamento nell'altro campo. Per ben comprendere come il problema sia stato risolto riferiamoci ad un esempio. Prendiamo in esame una ipersfera; questa ipersuperficie si può chiamare convessa. Più precisamente essa divide lo spazio in due regioni una esterna e l'altra interna. Consideriamo una calotta che forma l'intorno di un punto P della ipersfera. L'iperpiano tangente in P ha in comune con la calotta (anzi con tutta la ipersfera) soltanto questo punto e giace poi per intero in una delle due regioni determinate dalla ipersfera, la regione esterna. Si dice perciò che verso tale regione la ipersfera è convessa, verso la altra invece concava. Si consideri ora che l'iperpiano tangente contiene un piano caratteristico. Identificando per semplicità il punto P con l'origine sia $ax + by = 0$ l'equazione di un tale iperpiano caratteristico.$^{(1')}$

[$^{(1')}$ Nell'ipotesi che il punto P sia l'origine e la φ sia l'equazione della ipersfera, l'equazione dell'iperpiano tangente è

$$x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 0 \tag{6}$$

dove le derivate sono calcolate nell'origine.

Consideriamo un generico piano caratteristico per l'origine e $ax+by = 0$ ne sia l'equazione. Questa equazione complessa, posto

$$a = a_1 + ia_2 \qquad b = b_1 + ib_2 \tag{7}$$

si risolve nelle due equazioni reali:

$$\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_1x_1 - a_2x_2 + b_1y_1 - b_2y_2;$$

$$\beta(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_2x_1 + a_1x_2 + b_2y_1 + b_1y_2.$$

I punti che soddisfano a queste due equazioni fanno certamente parte del luogo dei punti di equazioni $\alpha + \beta = 0$, cioè

$$(a_1 + a_2)x_1 + (a_1 - a_2)x_2 + (b_1 + b_2)y_1 + (b_1 - b_2)y_2 = 0.$$

Questa equazione coincide con la (6) se è

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right);\ a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right);$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right);\ b_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right). \tag{8}$$

Dunque l'iperpiano di equazione (5) contiene certamente il piano caratteristico di equazione $ax + by = 0$ se i coefficienti della $ax + by = 0$ sono determinati dalle posizioni (8) e (7).]

Questo piano caratteristico, come l'iperpiano tangente ha in comune con la calotta il solo punto P e giace poi sulla regione verso la quale la superficie è convessa. Diamo allora un piccolo spostamento a tale piano caratteristico nel verso della normale esterna, consideriamo cioè un qualunque piano

$$ax + by + k\varepsilon = 0 \tag{9}$$

essendo k, un numero opportunamente fissato ed ε reale, comunque piccolo, purchè di segno opportuno, in modo che il piano risulti spostato rispetto al piano (4) nel verso della normale esterna. Il piano di equazione (9) viene a giacere tutto nella regione esterna. Questo fatto alla luce del teorema di continuità delle singolarità, ci dice che non può la regione esterna essere il campo di esistenza di una funzione avente la ipersfera come frontiera naturale.

Se infatti ciò non fosse possibile si avrebbe che mentre il [sul *sic*] piano di equazione (9), con $\varepsilon = 0$ esisterebbe un punto singolare, tali punti mancherebbero su ogni piano caratteristico di equazioni (9), con $\varepsilon \neq 0$ e di un certo determinato segno, ciò che è contro il teorema di continuità. La ipersfera può bensì essere la frontiera naturale del campo di esistenza di una funzione analitica, ma tale campo può coincidere soltanto con la regione interna, verso la quale la ipersfera è concava. Teniamo ora presente che il teorema di continuità sussiste anche quando ai piani caratteristici si sostituiscono superficie caratteristiche, nel senso sopra precisato, e badiamo al caso che si tratti di una ipersuperficie generica di equazione $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$. È evidente che, se una delle due regioni determinate dalla superficie per esempio quella nella quale è $\varphi > 0$ è il campo di esistenza di una funzione ed ha per frontiera naturale la ipersuperficie, nell'intorno di un certo punto di essa, ogni superficie caratteristica passante per questo punto deve necessariamente avere punti nella regione dove è $\varphi < 0$, giacchè, qualora ciò non fosse, basterebbe un piccolo spostamento per portare la superficie completamente nel campo di esistenza della funzione. Se $g(x, y) = 0$ è l'equazione della superficie caratteristica in questione darle uno spostamento lungo la normale, equivale a considerare la famiglia di superficie di equazioni $g(x, y) - k\lambda = 0$, dove k è un numero complesso fisso, opportunamente scelto e λ è un parametro reale, e dare inoltre a λ valori, comunque piccoli in grandezza, ma di segno scelto in modo che la superficie si muova verso la regione dove è $\varphi > 0$. Come si vede si ha allora che, mentre la superficie della famiglia corrispondente al valore nullo del parametro, ha un punto singolare della funzione, ciò non avviene per ogni superficie della famiglia corrispondente a valori di λ comunque piccoli, ciò che è contro il teorema della continuità. Orbene, se una ipersuperficie, nell'intorno di un punto, è tale che, dividendo lo spazio in due regioni, qualunque superficie caratteristica passante per il punto ha sempre punti in una delle due regioni, si dice che verso l'altra regione la ipersuperficie è pseudoconvessa in senso largo. Dalle considerazioni precedenti discende il teorema: "Condizione necessaria perchè una delle due regioni determinate da una ipersuperficie, nell'intorno di un suo punto sia il campo di esistenza di una funzione avente la ipersuperficie come frontiera naturale è che questa sia pseudoconvessa in senso largo verso la altra regione". Si dice poi che una ipersuperficie, nell'intorno di un suo punto, è pseudoconvessa in senso stretto verso una delle due regioni dello spazio da essa determinate, se esiste una superficie caratteristica che passa per il punto e giace tutta in tale regione in modo che un piccolo spostamento lungo la normale la possa portare completamente nella regione stessa. Si estende in tal modo la nozione di convessità, una curva infatti, è, in un suo punto, convessa verso una regione quando esiste una retta che passa per il punto e giace poi tutta in una regione. Ciò naturalmente in un intorno del punto. Analoga definizione si dà per le superficie nello spazio ordinario, riferendosi ai piani, anzichè alle rette. Orbene sussiste il teorema: "Condizione sufficiente perchè, nell'intorno di un suo punto, una ipersuperficie sia la frontiera naturale del campo di esistenza di una funzione analitica è che abbia, nell'intorno del punto, la proprietà della convessità in senso stretto. Se ciò si verifica, delle due regioni dello spazio, che hanno per comune frontiera la ipersuperficie, può essere campo di esistenza di una funzione soltanto quella verso la quale la ipersuperficie non è pseudoconvessa". È spontaneo ora domandare come possa essere caratterizzata la pseudoconvessità dal punto di vista analitico. Il problema, sempre in piccolo è stato risolto da E.E. Levi. Riportiamo qui il risultato al quale questo autore è pervenuto. Supposto che la ipersuperficie sia doppiamente regolare e la sua equazione sia $\varphi = 0$, poniamo:

$$L = \triangle_1' \, \varphi \cdot \triangle_2'' \varphi + \triangle_2' \varphi \cdot \triangle_1'' \varphi$$

$$- 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2}\right)$$

$$- 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_1}\right). \tag{10}$$

I simboli $\triangle_1$ e $\triangle_2$ si riferiscono ai noti operatori differenziali, primo e secondo, e gli apici stanno per indicare la coppia delle variabili rispetto ai [alle *sic*] quali si applicano tali operatori. Precisamente è:

$$\triangle_1'\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2\ ;\ \triangle_2'\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}$$

$$\triangle_1''\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2\ ;\ \triangle_2''\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}.$$

La (10) è l'espressione differenziale di Levi. Il risultato di Levi si può compendiare così:

1)- Condizione perchè verso una regione la ipersuperficie sia pseudoconvessa in senso largo è che risulti $L \geq 0$. Se dunque la condizione non è verificata, ma è invece $L < 0$ si può affermare che, nemmeno localmente la ipersuperficie può essere la frontiera naturale del campo di esistenza di una funzione analitica, cioè non è possibile definire in una delle due regioni una funzione analitica che non sia prolungabile nell'altra.

2)- Condizione sufficiente per la pesudoconvessità in senso stretto è che risulti $L > 0$. Se tale condizione è verificata, la [nella *sic*] regione verso la quale la ipersuperficie è pseudoconcava si può definire una funzione che ha tale regione come campo di esistenza e non può essere prolungata nella regione della pseudoconvessità.

3)- Se infine risulta identicamente $L = 0$ la ipersuperficie è un iperplanoide, cioè il luogo di una semplice infinità di superficie caratteristiche. Si ha in tal caso la pseudoconvessità verso ambedue le regioni. Come ben si vede, c'è una certa analogia con le rette del piano e di piani dello spazio. Un iperplanoide può essere la frontiera naturale di due campi, cioè in ciascuna delle due regioni dello spazio da esso determinato si può definire una funzione non suscettibile di prolungamento nell'altra. Abbiamo soltanto enunciato il teorema che afferma l'esistenza di una funzione avente come campo naturale di esistenza la regione verso la quale una ipersuperficie è pseudoconcava, senza potersi prolungare nella regione verso la quale una superficie è pseudoconvessa. Senza entrare nelle sottigliezze della dimostrazione, vogliamo soltanto fare un rapido e superficiale accenno senza alcun rigore analitico, alla maniera di costruire una simile funzione. Si invoca il principio di condensazione che abbiamo già una volta citato. Data la ipersuperficie S, supposta pseudoconvessa in senso stretto nell'intorno di pun [un *sic*] punto, P, diciamo C la regione di tale intorno verso la quale è pseudoconvessa, e Γ la regione verso la quale è pseudoconcava. Esiste dunque una superficie caratteristica passante per P e giacente tutta in C. Lo stesso avviene naturalmente per i punti dell'ipersuperficie nell'intorno di P. Prendiamo allora in tale intorno un insieme di punti della ipersuperficie, che sia numerabile, e nello stesso tempo, denso sulla ipersuperficie. Siano: $P_1, P_2, ..., P_n, ...$ i punti di un tale insieme. Indicheremo con $g_i(x, y) = 0$ l'equazione di una superficie caratteristica passante per P_i e giacente tutta in C. La $g_i(x, y)$ è una funzione olomorfa, nulla soltanto nei punti della superficie caratteristica. Ponendo: $\varphi_i(x, y) = \frac{1}{g_i(x,y)}$ si ottiene una funzione avente per punti singolari tutti e soli i punti della superficie caratteristica. Quindi, in particolare il punto P_i della ipersuperficie S. La $\varphi_i(x, y)$ è dunque regolare in tutta la regione Γ. Consideriamo allora la serie di funzioni analitiche: $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \varphi_i(x, y)$. Scegliendo opportunamente la successione delle costanti $\gamma_1, ..., \gamma_n, ...$ si può far sì che la serie converga uniformemente in tutto Γ. L'operazione non presenta eccessive difficoltà e lo studioso può cimentarsi con le sue forze nel problema. Si viene a formare in tal modo una serie di funzioni, analitiche in Γ, uniformemente convergente verso una funzione $\varphi(x, y)$, la quale sarà pur essa analitica in Γ. Siccome poi ogni punto della ipersuperficie è punto di accumulazione dell'insieme dei punti P_i ciascuno dei quali è singolare per una delle $\varphi_i(x, y)$, si può concludere che tutta la ipersuperficie, localmente, è singolare per la funzione $\varphi(x, y)$, purchè però, è il punto delicato di tutta l'operazione descritta, nel formare la serie si faccia sì che le singolarità non vengano a compensarsi, pertanto a scomparire nella somma. Ma a noi basta l'avere semplicemente accennato al modo di risolvere il problema. Osserviamo infine che nel caso di un iperplanoide la scelta della infinità numerabile di superficie caratteristiche è enormemente facilitata potendo effettuarsi nella semplice infinità di superficie caratteristiche che costituiscono l'iperplanoide stesso. Sia $f(x, y)$ una funzione olomorfa per $y = y_0$ ed x

variabile in un certo dominio D del piano delle x. Si tenga presente il carattere locale dell'olomorfia, si rifletta che, per ogni x di D, la funzione sarà olomorfa in un certo intorno dell'origine del piano delle y. Indichiamo con Rx il raggio del massimo cerchio, Cx, di centro nell'origine, nel piano delle y, entro il quale la funzione è olomorfa. Tale raggio risulta funzione reale della variabile complessa x e si chiama la "Funzione di Hartogs" relativa alla funzione olomorfa $f(x,y)$ ed al dominio D. Essa è una funzione sempre positiva; se all'aggettivo olomorfa si sostituisce l'altro: meromorfa, si ottiene egualmente una funzione Rx che si chiama la "Funzione di Levi". Quel che diremo vale tanto per la funzione di Hartogs che per quella di Levi, anche se, riferendoci alla $f(x,y)$, parleremo di funzione olomorfa. La funzione log Rx gode di due proprietà che vogliamo mettere in evidenza:

a)- è semicontinua inferiormente in D.

b)- è superarmonica in D.

Diamo ora un cenno sulla semicontinuità: sia $f(x)$ una funzione reale della variabile reale o complessa x, o anche, in generale, del punto x di uno spazio a quante si vogliono dimensioni. Sia x_0 un punto di accumulazione dell'insieme di definizione di $f(x)$. Detto ρ un numero positivo, consideriamo l'intorno di x_0 di raggio ρ e diciamo $E'(\rho)$ ed $E''(\rho)$ rispettivamente l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $f(x)$ in tale intorno. I due numeri sono evidentemente funzioni di ρ, la prima non crescente, la seconda non decrescente. Trattandosi dunque di funzioni monotone esistono i loro limiti per $\rho \to 0$, ciascuno potendo essere finito od infinito. Poniamo: $l' = \lim_{\rho\to 0} E'(\rho)$; $l'' = \lim_{\rho\to 0} E''(\rho)$. I due numeri l' ed l'' così ottenuti si chiamano limiti di indeterminazione di $f(x)$ in x_0, e, particolarmente, prendono il nome di minimo limite e massimo limite di $f(x)$ nel punto x_0, e si indicano con i simboli $\lim'_{x\to x_0} f(x)$; $\lim''_{x\to x_0} f(x)$. Dalla definizione si deduce che i due limiti di indeterminazione esistono sempre; anche se la funzione non ha limite nel punto x_0, ed è: $\lim'_{x\to x_0} f(x) \leq \lim''_{x\to x_0} f(x)$, la differenza $l'' - l'$ si chiama "oscillazione della funzione in x_0". Si ha inoltre evidentemente: "Condizione necessaria e sufficiente perchè esista il limite di $f(x)$ in x_0 è che sia: $\lim'_{x\to x_0} f(x) = \lim''_{x\to x_0} f(x)$, nel qual caso il limite, finito od infinito, coincide col valore comune dei due limiti di indeterminazione". I due limiti di indeterminazione godono di due proprietà:

1)- Comunque si assegni $\varepsilon > 0$ arbitrario, la funzione $f(x)$ è in x_0 definitivamente compresa tra $l' - \varepsilon$ ed $l'' + \varepsilon$. Cioè per ogni $\varepsilon > 0$ si può trovare un intorno di x_0 tale che, per ogni x di tale intorno è: $l' - \varepsilon < f(x) < l'' + \varepsilon$.

2)- Comunque si assegna $\varepsilon > 0$, la funzione in x_0 non è mai definitivamente maggiore di $l' + \varepsilon$, nè mai definitivamente minore di $l'' - \varepsilon$. Cioè, dato $\varepsilon > 0$ e qualunque sia l'intorno di x_0 si troveranno in esso sempre punti x per i quali è $f(x) < l' + \varepsilon$ ed altri punti x per i quali è $f(x) > l'' - \varepsilon$. Queste due proprietà sono caratteristiche del minimo e del massimo limite e si possono assumere come loro definizione. Ciò premesso, diremo che una funzione, definita in x_0, è ivi semicontinua inferiormente se è $f(x_0) = \lim'_{x\to x_0} f(x)$. Analogamente diremo che in x_0 è semicontinua superiormente se è $f(x_0) = \lim''_{x\to x_0} f(x)$. Il concetto di semicontinuità fu introdotto per la prima volta in Analisi da Baire: Leçons sur les fonctions discontinues. Paris, Gauthier-Villars Pag. 71. Confronta anche: Picone: Lezioni di Analisi infinitesimale. Catania 1923 pag. 87, n^o 30.

Dimostriamo, che log Rx è semicontinua inferiormente. Osserviamo che per questo basta dimostrare che è semicontinua inferiormente la funzione Rx. Per questo facciamo vedere che se $\bar{x}$ è un punto di D, risulta: $R\bar{x} = \lim'_{x\to\bar{x}} Rx$, cioè la funzione Rx è semicontinua inferiormente in D. Poniamo per semplicità $\lim'_{x\to\bar{x}} Rx = l'$. In virtù delle proprietà caratteristiche dei minimi limite, comunque si fissa un numero positivo $\varepsilon > 0$, e comunque si prenda un intorno di $\bar{x}$, vi sono in esso punti per i quali è $Rx < l' + \varepsilon$. In altri termini, detto C_ε il cerchio di centro y_0 e raggio $l' + \varepsilon$ nel piano delle y, in un qualsiasi intorno di $\bar{x}$, nel piano delle x, esiste almeno un punto x al quale corrisponde un punto y di C_ε tale che (x, y) è singolare per la $f(x, y)$. Ne segue che esiste un punto $(\bar{x}, y)$, con y in C_ε, che è punto di accumulazione di punti singolari e pertanto è anch'esso singolare. Ciò equivale a dire che non può essere $R\bar{x} > l' + \varepsilon$, qualunque sia ε. Ora se fosse $R\bar{x} = l > l'$, sarebbe ancora $R\bar{x} > l' + \varepsilon$ con $\varepsilon < l - l'$, quindi è $R\bar{x} \leq l'$. Sempre per le proprietà caratteristiche del minimo limite, comunque si fissa ε, si può determinare un intorno di $\bar{x}$ tale che, per ogni x di tale intorno è: $R\bar{x} > l' - \varepsilon$. Detto allora C'_ε il cerchio di centro in y_0 e raggio $l' - \varepsilon$ nel piano delle y, si potrà determinare un intorno I di $\bar{x}$ nel piano delle x tale che nel campo IC'_ε non esistono punti singolari di $f(x, y)$ con $x \neq \bar{x}$. Ma ciò mostra che non se ne possono avere nemmeno con $x = \bar{x}$, altrimenti sul piano caratteristico $x = \bar{x}$ vi sarebbero punti singolari contenuti in C'_ε, mentre poi non ve ne sarebbero su ogni piano caratteristico $x = \bar{x} + \varepsilon$ con ε tale che il punto $\bar{x} + \varepsilon$ sia in I. Ne segue che non può essere $R\bar{x} < l' + \varepsilon$ qualunque sia ε, e pertanto non può essere $R\bar{x} < l'$. In definitiva, non potendo essere nè $R\bar{x} < l'$, nè $R\bar{x} > l'$ deve essere: $R\bar{x} = l'$. Veniamo ora alla dimostrazione della seconda proprietà della funzione log Rx. Una funzione si chiama superarmonica in un dominio D quando [se *n.d.c.*] gode la proprietà di essere maggiore o uguale ad una funzione armonica sulla frontiera di un qualsiasi dominio contenuto in D, lo è altresì nei punti interni. Supponiamo quindi di avere una funzione armonica in D, i cui valori sulla frontiera di un qualunque dominio, $\triangle$, contenuto in D, non superano quel di log Rx. Possiamo sempre porre tale funzione sotto la forma log $p(x)$, con $p(x)$ positiva in tutto $\triangle$. Si ha allora: $Rx = p(x)$ su $F\triangle$. Se facciamo vedere che è $Rx \geq p(x)$ in tutto $\triangle$, la proprietà sarà dimostrata, perchè la stessa relazione sussisterà tra i logaritmi. Chiamiamo $q(x)$ la funzione armonica coniugata di log $p(x)$, di modo che la funzione: $\log \varphi(x) = \log\ p(x) + iq(x)$, è una funzione olomorfa della variabile x. Essendo: $\varphi(x) = p(x)e^{iq(x)}$ se ne deduce che il modulo di $\varphi(x)$ è proprio $p(x)$. Poniamo ancora: $\psi(x) = e^{\varphi(x)}$. Abbiamo così una nuova funzione, definita in tutto $\triangle$. Teniamo ora presente che la funzione $f(x, y)$ è olomorfa per $x \in D$ ed $y = 0$. Inoltre essa è per ogni x di D e quindi di $\triangle$, olomorfa per $|y| < Rx$. Ne segue l'olomorfia per $|y| < p(x)$ ed $x \in F\triangle$ giacchè, quando x è su $F\triangle$ è $Rx \geq p(x)$. Operiamo la trasformazione: $X = x$; $Y = y$. La funzione $F(X, Y)$, nella quale si trasforma la $f(x, y)$ risulta olomorfa per $Y = 0$ ed $X \in \triangle$ ed inoltre risulta ancora olomorfa per $|X| < 1$ ed $X \in F\triangle$. Ci troviamo perciò proprio nelle condizioni del teorema fondamentale di Hartogs, essendo la $F(X, Y)$ olomorfa per X in $\triangle$ ed Y in un intorno dell'origine, ed inoltre per X su $F\triangle$ ed Y nel cerchio di raggio unitario. Essa è dunque olomorfa per Y in tale cerchio ed X in $\triangle$, cioè per $|Y| < 1$ ed $X \in \triangle$. Passando alla $f(x, y)$, questa sarà olomorfa per $|y| < \psi(x)$ ed $x \in \triangle$ ossia $|y| < p(x)$ ed $x \in \triangle$. Ma, per ogni x di $\triangle$ il raggio di convergenza del piano delle y è Rx, quindi è $Rx \geq p(x)$ per ogni $x \in \triangle$. c. v. d. Si potrebbe ancora dimostrare, e può darsi che sia stato già dimostrato, che le due proprietà sono caratteristiche della funzione log Rx. Ciò naturalmente in senso molto esteso, con molta latitudine di scelta. Vogliamo ora accennare ad una dimostrazione, sostanzialmente non diversa dalla precedente della proprietà a), che si ottiene facendo ricorso al noto teorema:

"Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $\varphi(x)$ sia semicontinua inferiormente in un dominio D è che, comunque si assegni $a > 0$, l'insieme $E\Big[\varphi(x)\Big] \leq a$ cioè l'insieme dei punti di D nei quali è $\varphi(x) \leq a$, sia chiuso".$^{(1')}$

Facciamo dunque vedere che l'insieme $E\Big[Rx \leq a\Big]$ che indicheremo, per semplicità con E, è chiuso. L'essere, per i punti x di E, $Rx \leq a$, ci assicura che ad ogni punto x di E è associato almeno un punto y nel dominio circolare Ca, nel piano delle y, tale che il punto (x, y) è singolare per $f(x, y)$. Diciamo allora H l'insieme di tutti questi punti singolari, (x, y) con x in E ed y corrispondente nel modo detto in Ca. Se $\bar{x}$ è un punto di accumulazione di E ci sarà in H almeno un punto di accumulazione $(\bar{x}, y)$ con y in Ca. Tale punto, essendo punto di accumulazione di punti singolari di $F(x, y)$ è anche esso singolare. Ciò dimostra che $R\bar{x} \leq a$, e cioè che l'insieme E è chiuso.

Siamo finalmente venuti in possesso degli strumenti acconci per affrontare la dimostrazione di un risultato enunciato fin dalla prima lezione. Affermammo infatti allora essere l'ipotesi della continuità, nella definizione di funzione analitica di più variabili, del tutto superflua. Avvertiamo ancora una volta che, unicamente allo scopo di semplificare il simbolismo nella dimostrazione, ci limiteremo a considerare il caso delle funzioni di due variabili, là dove i risultati che enunceremo sono affatto generali e le dimostrazioni possono ripetersi per le funzioni di n variabili, fatte le poche evidentissime modifiche del caso. Ci proponiamo dunque di dimostrare il seguente teorema: "Una funzione di due variabili complesse, $f(x, y)$, analitica separatamente, rispetto alla x in un campo A_1 del piano delle x, e rispetto alla y in un campo A_2 del piano della y, è una funzione analitica nelle due variabili nel campo A, prodotto di A_1 ed A_2". Questo teorema rappresenta una estensione del teorema di Goursat relativo alle funzioni di una sola variabile: "Una funzione derivabile in un campo è ivi olomorfa". Supposto infatti acquisito tale teorema è dedotta la conseguenza che una funzione di due variabili, derivabile rispetto ad y, per ogni fissato x in A_1 è olomorfa rispetto ad y, analogamente nei riguardi della x, il teorema si può anche tradurre nei seguenti termini: "Una funzione di due variabili, derivabile rispetto ad una variabile in un campo

$^{(1')}$ Si veda: Saks- Théorie de l'Integrale. Varsavie 1933

A_1 e rispetto all'altra in un campo A_2, è olomorfa nel campo prodotto A". Perverremo alla dimostrazione del teorema attraverso due lemmi: il lemma di Hartogs ed il lemma di Osgood. Supponiamo che una funzione di due variabili, $F(x, y)$, olomorfa o meromorfa nell'intorno di un punto, sia suscettibile del prolungamento analitico, olomorfo o meromorfo, rispetto ad una delle due variabili, ci si domanda: effettuato il prolungamento, la funzione che si viene a definire nel campo ampliato è olomorfa, o meromorfa, come funzione delle due variabili? Alla domanda risponde affermativamente il lemma di Hartogs per quanto riguarda il prolungamento olomorfo, ed una ricerca effettuata dal Caccioppoli ci autorizza a rispondere affermativamente anche nel caso del prolungamento meromorfo. Sussiste cioè il lemma di Hartogs-Caccioppoli: "Ogni prolungamento, olomorfo o meromorfo, effettuato rispetto ad una sola variabile equivale ad un prolungamento rispetto al complesso delle variabili". Per quel che a noi occorre è sufficiente limitarci al solo prolungamento olomorfo e dimostrare perciò il solo lemma di Hartogs. Supponiamo dunque che $F(x, y)$ sia una funzione olomorfa nell'intorno di un punto, che identificheremo senz'altro con l'origine. Per operare il prolungamento rispetto ad una sola variabile, per esempio rispetto alla y, occorre considerare la funzione come funzione della sola y e svilupparla in serie di Taylor. Orbene un tale sviluppo in serie si può effettuare anche sviluppando la funzione in serie doppia, indi ordinare la serie secondo le potenze della y. Si ottiene in tal modo una serie di potenze:

$$f_0(x) + f_1(x)y + ... + f_n(x)y^n + ... \tag{11}$$

i cui coefficienti sono funzioni olomorfe della x in un certo intorno dell'origine. Per ogni fissato x, la serie in y sarà convergente entro un certo cerchio e rappresenterà una funzione olomorfa della y. Indichiamo con Γ il cerchio di centro nell'origine, nel piano della x, nel quale la x può fissarsi in modo che la serie (11) in y converga e con C_2 indichiamo il cerchio, nel piano delle y, nel quale la serie (11) converge per ogni x di Γ. Orbene faremo vedere che può determinarsi un dominio circolare $C_1 \subset \Gamma$ tale che la serie (11) converge uniformemente per $x \in C_1$ ed y contenuto in un qualsiasi dominio circolare interno a C_2. Ne segue allora che la (11), non solo, per ogni valore della x in C_1, rappresenta una funzione analitica della y in C_2, ma, in base al teorema di Weierstrass sulle serie di funzioni analitiche, rappresenta una funzione olomorfa di x ed y in C_1C_2. Con ciò il lemma si potrà ritenere dimostrato, giacchè, per effettuare il prolungamento analitico rispetto ad y, si parte dalla serie (11) ed in un punto P_0, di C_2, si sviluppa in serie di y la funzione rappresentata dalla (11), alla nuova serie si può applicare, come vedremo, il risultato ottenuto per la (11). Se ne deduce che, detto C_2' il nuovo cerchio di convergenza di centro P_0, nel piano della y, la nuova serie rappresenta una funzione analitica di x ed y in C_1C_2', risultato questo che dimostra il lemma. Occorre dunque far vedere che la (11) converge uniformemente per x contenuto in un certo dominio circolare C_1 ed y in un qualsiasi dominio circolare interno a C_2. La serie (11) converge in C_2 per ogni x fissato in Γ. Diciamo ρ il raggio di C_2. Se η è un qualsiasi numero in modulo minore di ρ, si ha che per ogni fissato x in Γ, si potrà trovare un intero ν tale che per ogni $n > \nu$ risulti:[1']

$$f_n(x) = \frac{1}{\eta}. \tag{12}$$

L'indice n dipende dalla x. Osserviamo però che, nello intorno dell'origine, cioè per x ed y opportunamente piccoli in modulo, la serie (11) converge uniformemente, perchè ottenuta da una serie doppia, che nell'intorno della origine rappresenta una funzione analitica. Ne segue che pur di restringere opportunamente il campo di variabilità della x, esiste un numero positivo k tale che si ha:

$$|f_n(x)| < k^n \quad \text{per} \quad x > \mu \tag{13}$$

con μ indipendente dalla x.[1'] Possiamo perciò dire che si può determinare un dominio circolare $C_1 \subset \Gamma$ di centro nell'origine tale che, per x variabile in C_1, è verificata la (12), con ν dipendente dalla x e la (13) con μ indipendente dalla x. La funzione reale di variabile

(1') La relazione segue immediatamente dalla relazione $\lim''_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n(x)} = \rho^{-1}$, vera per ogni fissato x in Γ e nell'ipotesi $|\eta| < \rho$, da cui segue: $\frac{1}{|\eta|} > \rho^{-1}$.

(1') Detti r_1 ed r_2 due numeri positivi, opportunamente piccoli, e certamente esistenti, tali che la serie (11) converge uniformemente per $|x| \leq r_1$ ed $|y| \leq r_2$, si ha: $\lim''_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n(x)} = r_1^{-1}$ e ciò uniformemente rispetto alla x. Quindi, qualunque sia $\varepsilon > 0$ si può determinare un'indice μ, indipendente dalla x tale che: $\sqrt[n]{f_n(x)} < r_1^{-1} + \varepsilon$ donde la (13).

complessa, definita dalla posizione: $\varphi_n(x) = \varphi_n(x_1, x_2) = n^{-1} \log |f_n(x)|$ è una funzione armonica di x_1 ed x_2 nel dominio C_1, ivi necessariamente regolare, potendo $f_n(x)$ annullarsi in alcuni punti, poli per $\varphi_n(x)$ che in tali punti, tende a meno infinito. Anche la funzione

$$\varphi_n(x) + \log |y| \tag{14}$$

è armonica, con singolarità, comunque si fissi y. Decomponiamo tale funzione in due parti, nel modo seguente. Chiamiamo $g_n(x)$ la funzione armonica, regolare in tutto C_1, che su FC_1 coincide con la (14) ove questa è positiva, sia invece nulla ove la (14) è negativa, cioè su FC_1 equivalga alla funzione (14), inferiormente troncata da zero, ciò che si esprime col simbolo:

$$g_n(x) = \Big[\varphi_n(x) + \log |y|\Big]_0 \quad x \in FC_1.$$

L'esistenza della funzione $g_n(x)$ ci è assicurata dal fatto che il problema di Dirichlet per il cerchio è risolubile e la soluzione è data dal noto integrale di Poisson, che ci dà i valori della funzione armonica nell'interno del cerchio mediante i valori sulla frontiera. La $g_n(x)$ è una funzione costantemente positiva o nulla sulla frontiera FC_1. Inoltre, essendo uguale o maggiore della (14) su FC_1 non ne può risultare minore nell'interno di C_1. Ponendo allora $h_n(x) = \varphi_n(x) + \log |y| - g_n(x)$, la funzione $h_n(x)$ così definita, risulta armonica negativa, con singolarità, in tutto C_1, e negativa o nulla su FC_1. Inoltre nei punti singolari di φ_n è $-\infty$. Se infatti consideriamo un cerchietto che contiene uno di questi punti, la funzione sulla circonferenza risulta negativa e quindi anche nell'interno e, pertanto, non può tendere che a $-\infty$. È necessario ora far ricorso ad un teorema della teoria di funzioni di variabile reale, teorema che ci limiteremo a richiamare supponendolo già dimostrato. Su FC_1 la $g_n(x)$ o è nulla o prende i valori della (14), qualora questa sia positiva. Ma, dalla (12) si deduce che si ha definitivamente $\varphi_n(x) + \log |y| < 0$, in tutto il dominio C_1, quindi anche su FC_1. La suddetta relazione non sussiste però uniformemente cioè per ogni x si può determinare un'indice, ν, dipendente dalla x, tale che la relazione sussiste per ogni $n > \nu$. Ciò dimostra che la $g_n(x)$, su FC_1, tende a zero al tendere di n all'infinito, ma non uniformemente rispetto ad x. Teniamo però presente che, nel dominio C_1, sussiste ancora la (13), e questa uniformemente rispetto alla x in C_1. Da essa si deduce che:

$\varphi_n(x) > \log\ k$, e quindi $\varphi_n(x) + \log|y| > \log\left|yk^{-1}\right|$, e ciò uniformemente rispetto alla x. Ne segue che qualunque sia x in C_1, si potrà determinare un'indice, ν, indipendente dalla x e tale che si ha: $|g_n(x)| < \log\left|yk^{-1}\right|$. Dunque la successione $g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x), ...$ è equilimitata e ciò uniformemente rispetto ad x in C_1. Sotto queste condizioni, il teorema al quale abbiamo accennato ci assicura che è lecito il passaggio al limite sotto il segno di integrale. Passando allora al limite sotto il segno d'integrale, nell'integrale di Poisson, che ci dà il valore di $g_n(x)$ in un punto interno a C_1 mediante i valori sulla frontiera, si ha: $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ e ciò uniformemente rispetto alla x in tutto il campo interno a C_1. Dunque, dato comunque $\varepsilon > 0$, si può determinare un'indice ν indipendente da x e tale da aversi $g_n(x) < \varepsilon$, in tutto il campo interno a C_1, o, ciò che è lo stesso in ogni dominio interno a C_1. Se ne deduce: $\varphi_n(x) + \log|y| < \varepsilon$, da cui $f_n(x) < \left[\frac{e^\varepsilon}{|y|}\right]^n$. La quantità e^ε si può ritenere arbitrariamente prossima all'unità, di modo che, qualunque sia y' con $|y'| < |y|$ si ha: $f_n(x) < \left[\frac{1}{|y'|}\right]^n$. Da ciò segue che la serie (11) converge uniformemente per x nel campo dei punti interni a C_1 e per y interno al cerchio di raggio $|y'|$. Ora osserviamo che dire: nel cerchio di raggio $|y'|$, equivale a dire in ogni dominio circolare interno a C_2. Ed infatti dato che un dominio circolare, interno a C_2, di raggio r, si potrà prendere: $r < |y| < \rho =$ raggio di C_2, indi $r < |y'| < y$, donde segue l'asserto. Dunque, la serie, di funzioni analitiche in x ed y, (11) converge uniformemente e, pertanto, rappresenta una funzione analitica di x ed y nel campo $C_1\ C_2$. Passiamo ora al prolungamento analitico rispetto alla y si ha:

$$\bar{f}_0(x) + \bar{f}_1(x)(y - y_0) + ... + \bar{f}_n(x)(y - y_0)^n + ... \qquad (11')$$

Diciamo C_2' il cerchio di convergenza di centro y_0 dove la $(11')$ è convergente per $x \in C_1$. D'altra parte, la $(11')$ rappresenta certamente una funzione analitica di x ed y per $x \in C_1'$ ed y in un certo campo circolare di centro y_0 ed interno a C_2. Quindi, la $(11')$ si trova nelle identiche condizioni della (11) e pertanto per essa si possono stabilire due relazioni del tipo (12) e (14) sulle quali è basata tutta la dimostrazione precedente. Anche per la $(11')$ possiamo dunque arrivare alle identiche conclusioni ed affermare che essa rappresenta una funzione analitica di x ed y nel campo $C_1 C_2'$. Ciò dimostra effettivamente che il prolungamento effettuato rispetto alla sola variabile y, si è risolto in un prolungamento nel complesso delle due variabili. Passiamo ora al lemma di Osgood: "Se una funzione, $F(x,y)$ è analitica separatamente rispetto alla x in un campo A_1 e rispetto alla y in un campo A_2, ed inoltre è in modulo limitata nel campo A, prodotto di A_1 ed A_2, è altresì analitica in A". L'ipotesi che $F(x,y)$ sia in modulo limitata in A importa l'esistenza di un numero positivo k tale da risultare:

$$F(x,y) < k; \quad (x,y) \in A \tag{15}$$

essendo inoltre $F(x,y)$ analitica in A_2 rispetto alla y, in ogni punto P di A è sviluppabile in serie di Taylor della sola y. Tenendoci pertanto nella posizione semplificata ma non limitativa, che P sia l'origine, si ha nell'intorno di tale punto:

$$F(x,y) = f_0(x) + f_1(x)y + ... + f_n(x)y^n + ... \tag{16}$$

Diciamo R il raggio di un cerchio, C_2, nel piano della y tale che in esso la (16) converga qualunque sia x in un certo intorno, C_1, dell'origine nel piano della x. Si ha qualunque sia x, ed indipendentemente dalla x in C_1:[1′]

$$|f_n(x)| > \frac{k}{R^n}. \tag{17}$$

Questa relazione mostra che la serie (16) riguardata come una serie di funzioni in x ed y è, nel campo $C = C_1C_2$, maggiorata in modulo dalla serie geometrica di ragione $\left|\frac{y}{R}\right|$ il cui primo termine è k, quindi è uniformemente convergente. Da ciò non è affatto lecito dedurre, invocando il teorema di Weierstrass che la serie rappresenta in C una funzione analitica, giacchè per ora niente ci autorizza ad asserire che le singole funzioni della serie

[1′] Difatti la (16) per ogni x di C_1, è assolutamente convergente in C_2, ed è evidente che, per la (15), si ha:

$$k > |f_0(x)| + |f_1(x)y| + ... + |f_n(x)y^n| + ...$$

da cui si ottiene, qualunque sia x: $|f_n(x)y^n| < k$ per $y \in C_2$ ed essendo in C_2: $|y| < R$, segue la (17).

sono funzioni analitiche in x ed y. Ciò apparirà quando avremo fatto vedere che le funzioni $f_i(x)$ per $i = 0, 1, ..., n, ...$ sono tutte analitiche in C_1. Che la $f_0(x)$ sia analitica appare immediatamente quando si riflette che, dalla serie (16), si ha: $F(x, 0) = f_0(x)$, e si tenga presente l'ipotesi che la $F(x, y)$ è analitica in x per ogni valore di y in A_2. Ciò assicurato, consideriamo la funzione:

$$\frac{F(x, y) - f_0(x)}{y} = \varphi_1(x, y).$$

Essa è palesemente olomorfa rispetto alla x in C_1 e rispetto alla y in C_2, qualora però si prescinda dal valore $y = 0$. Si ha, per $y \neq 0$: $\varphi_1(x, y) = f_1(x)+f_2(x)y+....+f_n(x)y^{n-1}+....$ Pertanto la funzione è limitata in C_2 e quindi si lascia prolungare in tutto C_2. Posto allora: $\varphi_1(x, 0) = \lim_{y\to 0} \varphi_1(x, y)$ si viene a definire una funzione analitica separatamente rispetto alla x in C_1 e rispetto alla y in C_2. Anche la funzione in x, $\varphi_1(x, 0)$, è allora analitica. Ma è: $\varphi_1(x, 0) = f_1(x)$, dunque anche la funzione $f_1(x)$ è analitica in C_1. Poniamo allora in generale: $\varphi_n(x, y) = \frac{F(x,y)-f_0(x)-...-yf_{n-1}(x)}{y^n}$ e si ragioni su questa funzione come su $\varphi_1(x, y)$. Si ha una funzione analitica rispetto alla x in tutto C_1 e rispetto alla y in tutto C_2, escluso il punto $y = 0$. Essa pertanto, essendo altresì limitata in C_2, si lascia prolungare in tutto C_2. Inoltre è: $\lim_{y\to 0} \varphi_n(x, y) = f_n(x)$, quindi la $f_n(x)$ è analitica in C_2. Le funzioni $f_i(x)$ sono dunque funzioni analitiche rispetto alla x in C_1 e, pertanto la serie (16) rappresenta nell'intorno, C, dell'origine una funzione analitica in x ed y. Ma l'origine si può ritenere un punto generico di A. Ciò che si è detto si è potuto dire nella sola ipotesi che l'origine sia un punto di A. Dunque la $F(x, y)$ è analitica nell'intorno di ogni punto [di *n.d.c.*] A e di conseguenza, in tutto A. Possiamo infine passare alla dimostrazione del teorema, per il quale abbiamo premesso i due lemmi precedenti. Supponiamo quindi che $f(x, y)$ sia analitica rispetto alla x in A_1 e rispetto alla y in A_2. Sia C un bicilindro contenuto completamente in A, prodotto di due domini, che, unicamente per semplicità, supporremo circolari, C_1 nel campo A_1 e C_2 nel campo A_2. Per ogni x fissato in C_1 la $f(x, y)$ è analitica rispetto ad y in C_2 e come tale, continua e limitata in tale dominio. Il massimo del suo modulo dipende evidentemente da x. Chiamiamo perciò I_n l'insieme dei punti, x, di C_1, tali che per ognuno di essi si abbia: $|F(x, y)| \leq n$. Tale insieme è chiuso, essendo C_1 un dominio e la $F(x, y)$ analitica e pertanto, continua rispetto ad x in C_1.

Consideriamo allora gli insiemi $I_1, I_2, ..., I_n, ...$ Essi esauriscono C_1, cioè ogni punto di C_1 appartiene necessariamente ad uno di questi insiemi, come è più che evidente. Si ha inoltre: $I_1 \subset I_2 \subset .... \subset I_n \subset .....$ Sotto queste condizioni si fa vedere molto facilmente che uno di questi insiemi deve necessariamente contenere un dominio, C_1', interno a C_1.[(1')] Esiste dunque un tale dominio, $C_1' \subset C_1$ tale che si può determinare un numero, $N > 0$, in modo che si ha: $|F(x, y)| < N$; $x \in C_1'$ ed $y \in C_2$. Nel dominio prodotto $C = C_1'C_2$, interno ad A, la funzione $F(x, y)$ soddisfa pertanto alle ipotesi del lemma di Osgood. Essa è quindi analitica in tale campo nel complesso delle due variabili. D'altra parte, essa per ipotesi, è analitica separatamente rispetto alla y in A_2, quindi la nostra funzione, analitica nelle due variabili in $C \subset A$, si lascia prolungare rispetto alla y in tutto A_2. In virtù del lemma di Hartogs è dunque analitica nel complesso delle due variabili nel campo prodotto $C_1'A_2$. Tale funzione si lascia ancora prolungare rispetto ad x in tutto A_1 e quindi, sempre in base al lemma di Hartogs, è analitica in tutto A. Ci proponiamo di dimostrare il seguente teorema di Weierstrass: "Una funzione meromorfa in tutto lo spazio, infinito compreso, è una funzione razionale". Sia $f(x, y)$ una funzione meromorfa in tutto lo spazio, infinito compreso. Fissiamo un punto, nel quale sia olomorfa, punto, che, al solito, identifichiamo con l'origine, di modo che possiamo affermare:

[(1')] Cominciamo col mostrare che: "Se un insieme chiuso, I, contenuto in un dominio D, non esaurisce D, deve necessariamente esistere in D tutto un dominio che non contiene alcun punto di I". E difatti, siccome I non esaurisce D, esiste almeno un punto, P, di D che non appartiene ad I e, di conseguenza, non è nemmeno punto di accumulazione, essendo I chiuso. Esiste pertanto un intorno di P che non contiene alcun punto di I. Ogni dominio contenuto in tale intorno esclude I. Ciò posto, veniamo alla successione degli insiemi I_k. Vogliamo far vedere che uno degli insiemi della successione deve necessariamente contenere tutto un dominio interno a C_1. Supponiamo infatti che ciò non si verifichi. In tale ipotesi, I_1 non esaurisce C_1 e pertanto esiste un dominio D_1 interno a C_1 che non contiene alcun punto di I_1. L'insieme I_2 non conterrà tutto D_1, e quindi in D_1 esiste un dominio che non contiene punti di I_2. Il procedimento è indefinitivamente iterabile e mostra che deve esistere in C_1 almeno un punto, che non appartiene ad alcuno degli insiemi I_k, contro il fatto, già acquisito, che la successione degli I_k esaurisce C_1.

a) in un opportuno intorno dell'origine, poniamo per $x \in C_1$ e $y \in C_2$, la funzione è olomorfa. Prescindendo dal metodo di introdurre i punti all'infinito, sia esso quello che si ispira al punto di vista dell'analisi oppure a quello che prende le mosse dal punto di vista della geometria, possiamo sempre, mediante un'opportuna trasformazione (omografica se si parte dal secondo metodo, lineare nelle due variabili separatamente se invece si parte dal primo metodo), ridurci al caso che siano regolari all'infinito sia la funzione $f(0, y)$ della sola y, sia la funzione $f(x, 0)$ della sola x. Dato il carattere locale dell'olomorfia, sussistono le altre due seguenti proposizioni:

b) per ogni x fissato in un certo intorno dell'origine del piano delle x, intorno che possiamo identificare con C_1, è regolare all'infinito la funzione della sola y, $f(x, y)$;

c) la $f(x, y)$ è ancora regolare all'infinito, riguardata come funzione della sola x, per ogni y fissato in un opportuno intorno dell'origine, nel piano della y, intorno che possiamo identificare con C_2. In virtù della proposizione b), per ogni x di C_1, la $f(x, y)$ è meromorfa in y, e regolare all'infinito, e quindi è una funzione di y razionale. Possiamo allora porre:

$$f(x, y) = \frac{a_0(x)y^m + a_1(x)y^{m-1} + ... + a_m(x)}{y^n + b_1(x)y^{n-1} + ... + b_n(x)} \tag{18}$$

per $x \in C_1$, ed y qualunque. Nulla però ci autorizza ad asserire che i coefficienti dei due polinomi in x figuranti nella (18) sono funzioni analitiche della x. Ma ciò, qualora si tiene conto della proposizione a), si può dimostrare facilmente seguendo la stessa via seguita per dimostrare il teorema di Levi. Dunque: la funzione $f(x, y)$, meromorfa per $x \in C_1$ ha l'espressione (18) con i coefficienti a_i e b_i funzioni olomorfe della x. Partendo dalla proposizione c), ragionando allo stesso modo si perviene al risultato che, per $y \in C_2$ ed x qualunque la funzione $f(x, y)$ ha l'espressione:

$$f(x, y) = \frac{c_0(y)x^p + c_1(y)x^{p-1} + ... + c_n(y)}{x^q + d_1(y)x^{q-1} + ... + d_q(y)}. \tag{19}$$

Il campo a quattro dimensioni ove sussiste la (18) e quello ove sussiste la (19) hanno in comune il campo C_1C_2, nel quale la $f(x, y)$ è olomorfa. In tale campo le espressioni debbono coincidere. I coefficienti a_i, b_i, c_i, d_i, sono funzioni analitiche della rispettiva variabile di cui sono funzioni, e quindi sono sviluppabili in serie. Eseguito lo sviluppo, nell'espressione (19) vengono a comparire soltanto le potenze della x non superiori ad un certo numero, mentre nell'espressione (18), qualora le a_i e b_i dessero luogo a serie effettive, si avrebbero potenze della x ad esponente comunque alto. Lo stesso dicasi scambiando x con y e scambiando ancora i ruoli delle due espressioni (18) e (19). Ora è evidente che, se così stessero le cose, nessuna identità potrebbe sussistere tra le due suddette espressioni della stessa funzione. Si deve allora necessariamente concludere che i coefficienti dei polinomi figuranti nelle (18) e (19) sono dei polinomi nella rispettiva variabile da cui dipendono. Come tali risultano definiti per ogni valore della variabile e l'identità fra le due espressioni che sussiste in C_1C_2, continua a sussistere in tutto lo spazio. Segue da ciò che la funzione $F(x, y)$ ha un'espressione razionale, cioè rapporto di due polinomi in tutto lo spazio. Con ciò il teorema è dimostrato. Ricordiamo ora una conseguenza che abbiamo tratto dal teorema di Levi: "Una funzione meromorfa su un piano caratteristico è meromorfa in tutto lo spazio". Questa proposizione ci permette di dedurre dal precedente teorema di Weierstrass, il corollario: "Una funzione meromorfa su un piano caratteristico, ivi regolare all'infinito, è una funzione razionale". Accenniamo ora, senza però dilungarci minutamente nella dimostrazione analitica, ma limitandoci a qualche considerazione geometrica ad una notevole conseguenza del testè dimostrato teorema di Weierstrass. È noto che nella teoria delle funzioni di una sola variabile, le uniche trasformazioni invertibili in grande, cioè in tutto il piano complesso, sono le sostituzioni lineari: $Z = \frac{az+b}{cz+d}$. Possiamo ora far vedere che, per le funzioni di più variabili, le sole trasformazioni invertibili o, come abbiamo chiamato, pseudoconformi, in grande sono quelle delle quali ci siamo serviti per introdurre i punti all'infinito. Siano dunque:

$$X = F(x, y); \quad Y = G(x, y) \tag{20}$$

le equazioni di una trasformazione, supposta invertibile in grande. Si è visto che per l'invertibilità in piccolo si richiede che, nel punto considerato, sia: $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \neq 0$. È evidente che allora questa condizione dovrà essere considerata in tutto lo spazio. Servendoci di considerazioni di carattere geometrico-intuitive, facciamo ora vedere:

1)- Le due funzioni $F(x, y)$ e $G(x, y)$ sono due funzioni razionali.

2)- Sono rapporto di due polinomi lineari.

3)- I denominatori dei due rapporti coincidono.

Dopo di che non ci sarà dubbio sulla conclusione. Le (20) per ipotesi, definiscono una trasformazione biunivoca senza eccezioni in tutto lo spazio. Nell'intorno di un punto (x, y) che per corrispondente ha un punto al finito si ha evidentemente l'olomorfia delle due funzioni $F(x, y)$ ed $G(x, y)$. Se invece al punto (x, y) corrisponde un punto all'infinito, si può operare una trasformazione omografica nelle variabili in modo da riportare il punto al finito. Le funzioni vengono ad essere espresse razionalmente mediante funzioni olomorfe e pertanto, sono funzioni meromorfe. Ne concludiamo: le due funzioni $F(x, y)$ e $G(x, y)$ analitiche nelle due variabili sono meromorfe in tutto lo spazio, e, pertanto razionali. Passiamo ora al secondo punto. Poniamo:

$$X = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \qquad Y = \frac{R(x, y)}{S(x, y)} \tag{21}$$

avendo indicato con P, Q, R, S, quattro polinomi in x ed y. La corrispondenza tra i punti (x, y) ed i punti (X, Y) è biunivoca. Se dunque prendiamo nello spazio (X, Y) un punto (α, β) le due equazioni in x ed y: $P - \alpha Q = 0$ e $R - \beta S = 0$ hanno una sola soluzione comune. Orbene le (21) rappresentano due curve algebriche, le quali hanno quindi un solo punto comune. In virtù del teorema di Bezout, esse sono due rette, e, di conseguenza i quattro polinomi sono lineari nelle due variabili x ed y. Basta infine far vedere che deve necessariamente essere $Q = S$. Supponiamo invece che sia $Q \neq S$. Le due equazioni lineari $Q = 0$ ed $S = 0$ avranno allora una sola soluzione comune, indichiamola con (x_0, y_0). Il limite: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{S}{Q}$ è del tutto indeterminato e dipende dal modo come (x, y) tende al punto (x_0, y_0). Le (21) per (x, y) tendente ad (x_0, y_0) danno X tendente ad infinito ed Y tendente ad infinito, e per il rapporto si ha: $\frac{X}{Y} = \frac{PS}{RQ}$. Ora si rifletta che il limite del rapporto $\frac{P}{R}$ è determinato, mentre come abbiamo osservato, non è affatto determinato il limite del rapporto $\frac{S}{Q}$. Ciò ci assicura che viene a mancare la biunivocità nella corrispondenza tra i punti (x, y) ed i punti (X, Y), avendosi il punto di indeterminazione (x_0, y_0) corrispondendo ad esso un sol punto all'infinito. Questo inconveniente si toglie senz'altro e soltanto supponendo che sia $Q = S$, giacchè allora il rapporto è ben determinato e perciò dato un punto per cui è $Q = R = 0$ è perfettamente individuato il punto all'infinito che gli corrisponde.

INDICE

ISBN 978-8869062506
9 788869 062506